

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Методические материалы для председателей и членов
предметных комиссий субъектов Российской Федерации
по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом
экзаменационных работ ЕГЭ 2022 года**

МАТЕМАТИКА

Москва
2022

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике, И.В. Яценко, в.н.с. Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений».

Авторы: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2022 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

В методических материалах характеризуются типы заданий с развёрнутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2016–2021 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

© И.В. Яценко, И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева, 2022

© Федеральный институт педагогических измерений, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Критерии проверки и оценка решений задания 12.....	5
2. Критерии проверки и оценка решений задания 13.....	23
3. Критерии проверки и оценка решений задания 14.....	38
4. Критерии проверки и оценка решений задания 15.....	52
5. Критерии проверки и оценка решений задания 16.....	64
6. Критерии проверки и оценка решений задания 17.....	79
7. Критерии проверки и оценка решений заданий 18.....	98
Указания по оцениванию развернутых ответов участников ЕГЭ для эксперта, проверяющего развёрнутые ответы на задания 12–18 по математике	115

ВВЕДЕНИЕ

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развёрнутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

Извлечения из Методических рекомендаций Рособнадзора по формированию и организации работы предметных комиссий субъекта Российской Федерации при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования должна быть растяжка по странице

Во время работы экспертам запрещается:

- иметь при себе средства связи, фото-, аудио- и видеоаппаратуру;
- копировать и выносить из помещений, в которых работает ПК, экзаменационные работы, критерии оценивания, протоколы проверки экзаменационных работ;
- разглашать информацию, содержащуюся в указанных материалах.

Также запрещается:

- без уважительной причины покидать аудиторию;
- переговариваться с другими экспертами ПК, если речь не идёт о консультировании с председателем ПК или с экспертом ПК, назначенным по решению председателя ПК консультантом.

Если у эксперта возникают вопросы или проблемы, он должен обратиться к председателю ПК или лицу, назначенному председателем ПК консультантом.

1. Критерии проверки и оценка решений задания 12

Задание № 12 – тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *a* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *a* задание № 12 оценивается 0 баллов.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Комментарий

Ответ в задании с развёрнутым ответом – это решение и вывод (называемый ответом).

Задача 12 (демонстрационный вариант 2022 г.)

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1 - 2\sin^2 x &= \sqrt{3}\cos x + 1; \quad \sin x - 2\sin^2 x = 0; \\ \sin x \cdot (2\sin x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

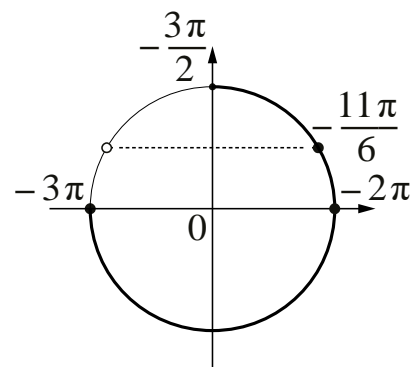
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}.$$



Комментарий

Множество корней может быть записано по-другому.

Отбор корней может быть произведён любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности на числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному отрезку. На окружности могут быть отмечены вспомогательные числа, принадлежащие числовому отрезку.

Задание 1

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 2 = 0; \quad (2\sin x + \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3}) = 0.$$

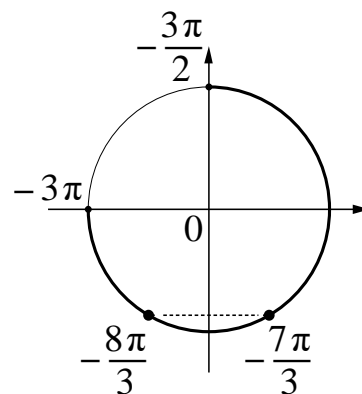
Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \sqrt{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём

корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 2

а) Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = 9^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $9t^2 - 28t + 3 = 0$, откуда $t = \frac{1}{9}$ или $t = 3$.

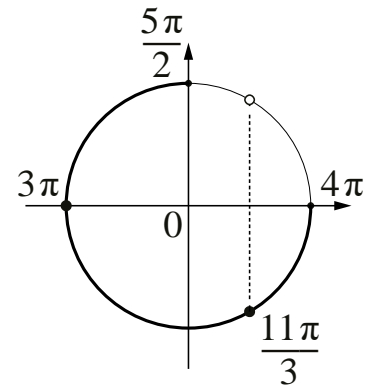
При $t = \frac{1}{9}$ получим: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$; $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

При $t = 3$ получим: $9^{\cos x} = 3$; $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, или

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получим числа: 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

Задание 3

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = \log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

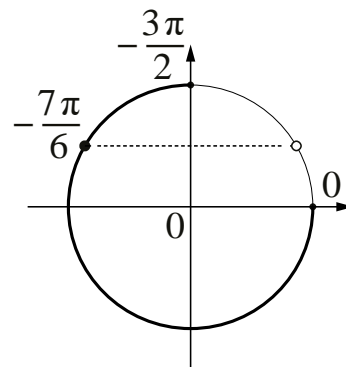
При $t = 2$ получим: $\log_4(4\sin x) = 2$, значит, $\sin x = 4$, что невозможно.

При $t = \frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$, значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 4

а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

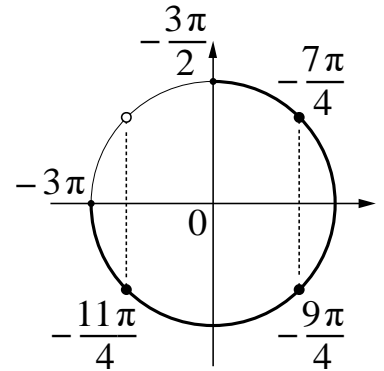
$$2\cos^2 x - 1 + 0,5 = \cos^2 x; \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Значит, или $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l$,

$l \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Примеры оценивания решений задания 12

Пример 12.1

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3} \sin x$$

$$-2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 3 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 3 + 24 = 27$$

$$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4} \quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{3}$$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x = \sqrt{3}$

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) $\sin x = \sqrt{3}$ - нет решений, т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$, а $|\sqrt{3}| > 1$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

1) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$$-3\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2}$$

$$-3 \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq -\frac{3}{2}$$

$$-3 + \frac{1}{3} \leq 2k \leq -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$

$$-\frac{8}{3} \leq 2k \leq -\frac{7}{6}$$

$$-\frac{16}{6} \leq k \leq -\frac{7}{12}$$

$$-\frac{16}{12} \leq k \leq -\frac{7}{12}$$

$$-1\frac{1}{3} \leq k \leq -\frac{7}{12}, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z}, \text{ то } k = -1$$

Если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3} = -\frac{8\pi}{6}$

2) $-3\pi \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2}$

$$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \leq 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$$

$$-\frac{13\pi}{3} \leq 2\pi n \leq -\frac{17\pi}{6}$$

$$-\frac{13}{6} \leq n \leq -\frac{17}{12}$$

$$-\frac{26}{12} \leq n \leq -\frac{17}{12}$$

$$-2\frac{1}{6} \leq n \leq -1\frac{5}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -2$$

Если $n = -2$, то $x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$

Комментарий

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 12.2

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
 $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cdot (-\sin x)$
 $1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3} \sin x$
 $-2\sin^2 x + 3 + \sqrt{3} \sin x = 0$
 Пусть $\sin x = y$
 Тогда
 $-2y^2 + 3 + \sqrt{3}y = 0$
 $D = \sqrt{3 - 4 \cdot (-2)} = \sqrt{27} > 0$ 2 корня
 $y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$
 Обратно $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = \sqrt{3}$
 $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ нет решений
 $\sin x \in [-1; 1]$
 б)
 При $n=0$
 $x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
 При $n=-1$
 $x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
 При $n=-2$
 $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
 При $n=-3$
 $x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ в пункте а. При решении квадратного уравнения есть неточность в записи дискриминанта – объединение записей дискриминанта и корня из него. Отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

Оценка эксперта: 1 балл.

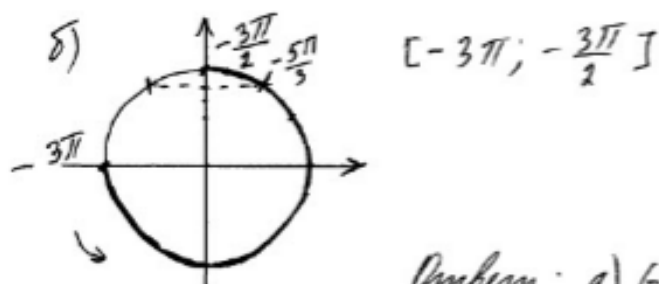
Пример 12.3

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$.

13 а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
 $\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \sqrt{3} \cdot \sin x$
 $1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 2 = 0$
 $-2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 3 = 0$
 $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 = 0$
 замена $\sin x = t, t \in [-1; 1]$
 $2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$
 $D = 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 3 + 24 = 27 = (3\sqrt{3})^2$
 $t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}; t_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{-4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin x = -\sqrt{3}; -\sqrt{3} \notin [-1; 1]$
 $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Ответ: а) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$
 б) $-\frac{5\pi}{3}$.

Комментарий

Тригонометрическое уравнение решено неверно. Во второй строчке в правой части отсутствует знак минус – ошибка в формуле приведения. Пункт а не выполнен (не из-за вычислительной ошибки).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 12.4

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.

13. $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$
 $9 \cdot (9^{\cos x})^2 - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$
 $9^{\cos x} = t$, тогда
 $9t^2 - 28t + 3 = 0$
 $D = 484 - 108 = 676$
 $t_1 = \frac{28 \pm 26}{18}$ $t_1 = \frac{1}{9}$ $t_2 = 3$
 $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$ $9^{\cos x} = 3$
 $9^{\cos x} = 9^{-1}$ $3^{2\cos x} = 3^1$
 $\cos x = -1$ $2\cos x = 1$ $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x_1 = \pi + 2\pi k$, нет $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, объединяя
 x_1 и x_2 получаем $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
б) $\frac{11\pi}{3}; 3\pi; 4\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$
Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, б) $3\pi, \frac{11\pi}{3}, 4\pi$.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ в пункте а. При отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 12.5

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$.

$$1.3. \text{ а) } 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot 5^{2 \cos x} - 28 \cdot 5^{\cos x} + 3 = 0$$

$$\text{Положим } 5^{\cos x} = t, \text{ то } 9 \cdot t^2 - 28 \cdot t + 3 = 0$$

$$D = 784 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 676$$

$$t_1 = \frac{28 - 26}{18} = \frac{1}{9}$$

$$t_2 = \frac{28 + 26}{18} = 3$$

$$5^{2 \cos x} = \frac{1}{9}$$

$$5^{2 \cos x} = 5^{-2}$$

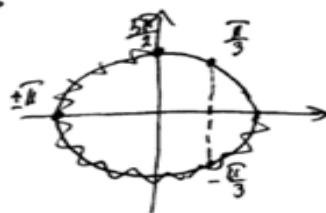
$$\cos x = -1$$

$$x = \pm \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5^{\cos x} = 5^1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{б) } \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ не подходит.}$$

$$1. \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2,5\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$$

$$2,5 < -\frac{1}{3} + 2k < 4$$

$$2\frac{5}{6} + \frac{2}{6} < 2k < 4\frac{1}{3} \quad | : 2$$

$$1\frac{5}{6} < k < 2\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k = 2 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$2. \quad x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2,5\pi < \pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi - 1$$

$$2,5 - 1 < 2k < 4 - 1 \quad | : 2$$

$$0,75 < k < 1,5$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$x = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$3. \quad x = \pi + 2\pi k$$

$$2,5\pi < \pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$$

$$1,75 < k < 2,5$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$x = \pi + 4\pi = 5\pi$$

$$\text{Ответ: } x = 3\pi, x = \frac{11\pi}{3}$$

Комментарий

В записи корней первого тригонометрического уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. Получен верный ответ в пункте а. При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2.

2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 12.6

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.

$$13. \text{ а) } 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot (9^2)^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$$9t^2 - 28t + 3 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 784 - 108 = 676$$

$$t_1 = \frac{28 - 26}{2 \cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}; \quad t_2 = \frac{28 + 26}{2 \cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$

$$\cos x = -1 \\ x = \pi + 2\pi d, d \in \mathbb{Z}$$

или $9^{\cos x} = 3$

$$\left(\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right)^{\cos x} = 3^1$$

$$2 \cos x = 1,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 4\pi; \quad \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq 4, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{5}{2} \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\frac{1}{6} \leq 2n \leq 3\frac{2}{3}, n \in \mathbb{Z}; \quad 2\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4\frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{12} \leq n \leq 1\frac{5}{6}, n \in \mathbb{Z}; \quad 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

n - нет чисел

$$k = 2$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + 2\pi d \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq 1 + 2d \leq 4, d \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{2} \leq d \leq 3, d \in \mathbb{Z}$$

$$d = 2, 3$$

$$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$$

Ответ: а) $x = \pi + 2\pi d, d \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$\text{б) } x_1 = \frac{11\pi}{3}; \quad x_2 = 3\pi; \quad x_3 = 5\pi$$

Комментарий

Тригонометрическое уравнение $\cos x = -1$ решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 12.7

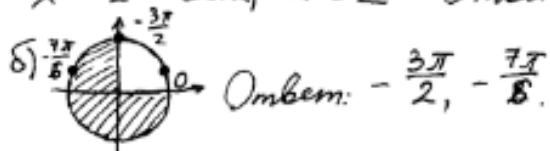
а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \log_4^2(4\sin x) - 5 \log_4(4\sin x) + 2 = 0, \quad \log_4(4\sin x) = t, \\ 2t^2 - 5t + 2 = 0; \quad D = 25 - 16 = 9 = 3^2, \quad t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{5+3}{4} = 1; \\ \log_4(4\sin x) = t_1 = \frac{1}{2}; \quad \log_4(4\sin x) = \log_4 2, \quad 4\sin x = 2; \quad \sin x = \frac{1}{2}; \\ x \in \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_4(4\sin x) = t_2 = 1; \quad \log_4(4\sin x) = \log_4 4; \quad 4\sin x = 4; \quad \sin x = 1; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Комментарий

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении t_2 , но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 12.8

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13) а) ОДЗ: $4\sin x > 0$
 $\sin x > 0$

Для любых x решим методом интервалов
Пусть $\log_4(4\sin x) = t; t \geq 0$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$D = 25 - 16$$

$$D = 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} \quad t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{5-3}{2} \quad t_2 = 1$$

Обратная замена

$$\log_4(4\sin x) = 1 \quad \text{или} \quad \log_4(4\sin x) = 4$$

$$4\sin x = 4$$

$$\sin x = 1$$

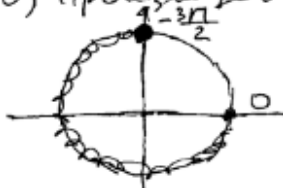
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4\sin x = 256$$

$$\sin x = 64$$

Нет решений.

б) Произведем отбор на единичной окружности



$$-\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ б) } -\frac{3\pi}{2}$$

Комментарий

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при нахождении корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 12.9

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$$а) 2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$$

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$, тогда:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = (3)^2$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2; \quad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2};$$

$$(1) \log_4(4\sin x) = 2;$$

$$4\sin x = 16;$$

$\sin x = 4$ - таких x не существует, так как $\sin \in [-1; 1]$,

$$\delta) \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$$

$$(2) \log_4(4\sin x) = \frac{1}{2};$$

$$4\sin x = 2;$$

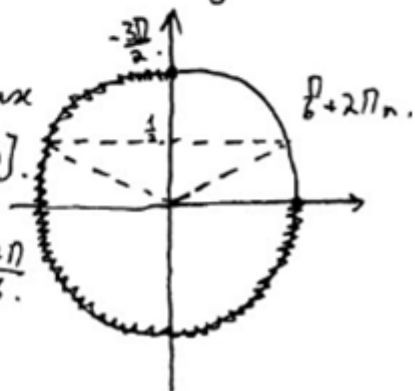
$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ и } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

Рассмотрим на ^{единице} окружности данный отрезок и корни;

корень $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ~~не~~ ни при каких условиях не будет лежать на $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

корень $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ попадет на этот отрезок в точке $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ в пункте а, но отбор корней с помощью числовой окружности в этом решении нельзя считать обоснованным. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 12.10

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

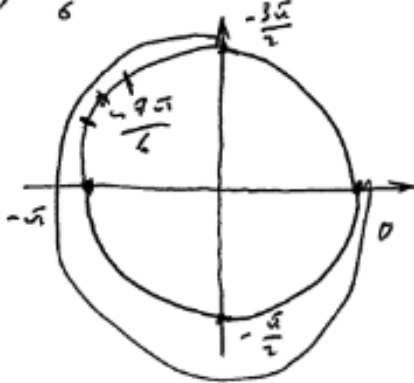
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

№ 13 $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ $\log_4(4\sin x) = t$ $4\sin x > 0$
 $2t^2 - 5t + 2 = 0$ $D = 25 - 16 = 9$ $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\log_4(4\sin x) = 2$ $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} 8 = 4\sin x \\ 2 = 4\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = 2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ $t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$
 $x = \frac{\sqrt{t}}{6} + 2\pi n; \frac{5\sqrt{t}}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\text{не подходит т.к. } -1 \leq \sin x < 1$

$[-\frac{3\pi}{2}, 0]$



Объяснение: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
 б) $x \in -\frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того, при нахождении ОДЗ допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительным. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 12.11

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}.$

№13.

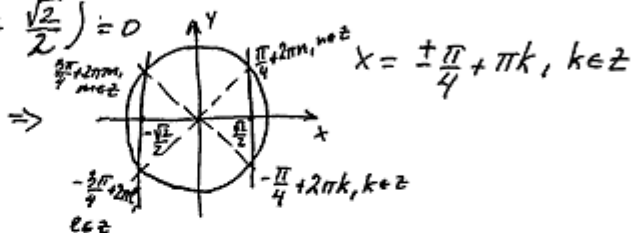
$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 2x + 0,5 &= \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 + 0,5 - \cos^2 x &= 0 \\ \cos^2 x - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

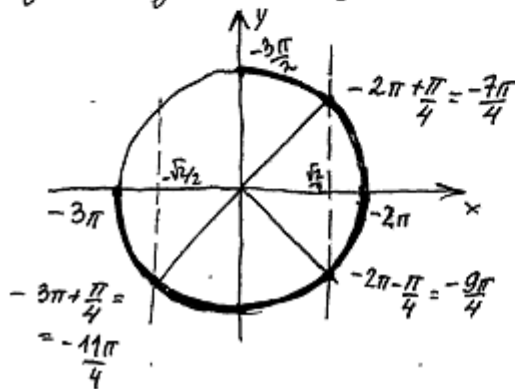
$$1. \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



а) Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) $x \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Для отбора корней построим единичную окружность.



б) Ответ: $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}.$

Комментарий

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 12.12

а) Решите уравнение $\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}.$

✓ 13

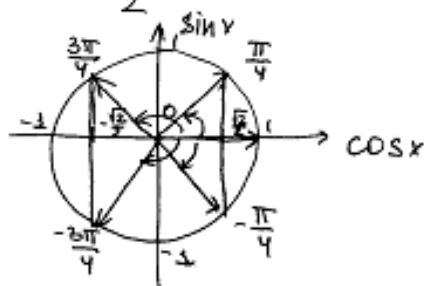
$$а) \cos 2x + 0,5 = \cos^2 x \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 + \frac{1}{2} = \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

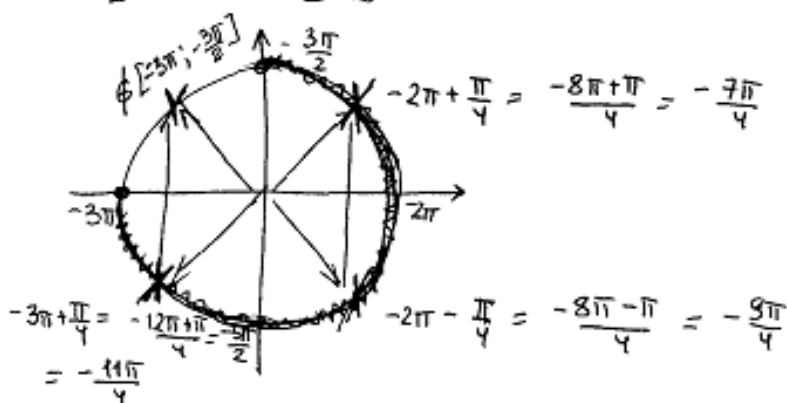
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$



Ответ: а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$

Комментарий

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

2. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание 13 – стереометрическая задача, она разделена на пункты a и b . В пункте a нужно **доказать** геометрический факт, в пункте b найти (вычислить) геометрическую величину.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

Задача 13 (демонстрационный вариант 2022 г.)

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Решение. а) Пусть точка H – середина AC . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

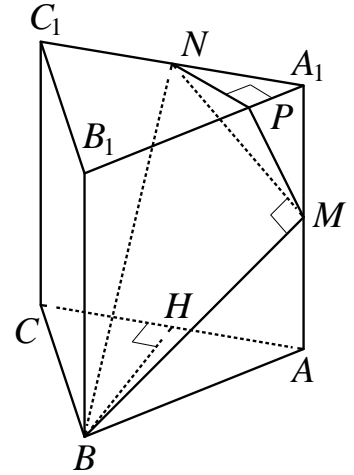
- б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP – проекция MN на плоскость ABB_1 .

Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP – линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$. Следовательно, $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.



Задание 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные AC . Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и A_1B_1 в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция KL_1LK_1 является сечением исходной призмы плоскостью γ . Рассмотрим плоскость BB_1M . Пусть эта плоскость пересекает прямые AC , KK_1 и LL_1 в точках N , E и F соответственно. Четырёхугольник BB_1MN – прямоугольник,

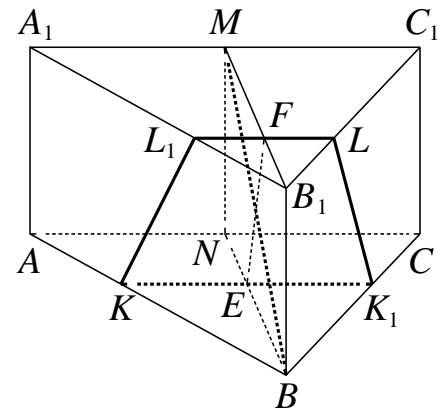


Рис. 1

причём $BB_1 = 3$, $B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1 : 2$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1 : 2$, откуда $MF = 2\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть EH – высота трапеции $EFMN$ (рис. 2), тогда $FH = MF - NE = \sqrt{3}$.

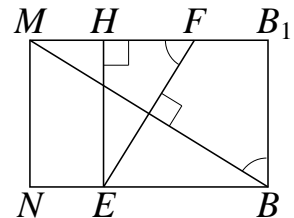


Рис. 2

Поскольку $\operatorname{tg} \angle MFE = \frac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg} \angle MBV_1$,

$$\angle MFE = \angle MBV_1 = 90^\circ - \angle BMF,$$

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC , которая перпендикулярна плоскости BB_1M . Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM , поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Расстояние от точки M до плоскости γ равно $MF \cdot \sin \angle MFE$, а площадь трапеции KL_1LK_1 равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}A_1C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin \angle MFE} = \frac{9}{\sin \angle MFE}.$$

Значит, искомый объём равен $\frac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin \angle MFE \cdot \frac{9}{\sin \angle MFE} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

Задание 2

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AKD = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK – высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD . Значит, они перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

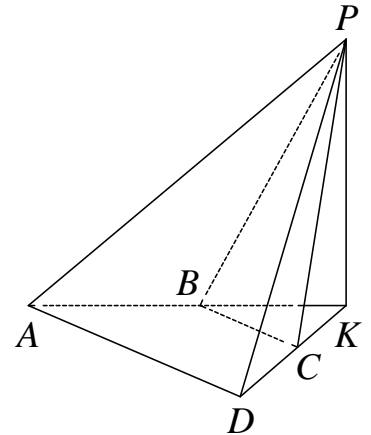
$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$,

а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.



Задание 3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC .
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α .

Решение.

а) По условию $DN : NC = SK : KC$, значит, прямые SD и KN параллельны. Следовательно, плоскости SAD и α параллельны (рис. 1).

Поскольку отрезки BC и AD параллельны, а плоскость α параллельна плоскости SAD , прямая BC параллельна плоскости α .

б) Поскольку плоскость α параллельна прямой BC , расстояние от точки C до плоскости α равно расстоянию от прямой BC до плоскости α . Пусть точки E и F – середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC . Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямой BC и параллельной ей плоскости α . Пусть плоскость α пересекает прямые SF и EF в точках Q и R соответственно (рис. 2). Тогда искомое расстояние равно расстоянию h от точки F до прямой QR .

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF , откуда

$$EF = 6, SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{10}; \cos \angle SEO = \frac{EO}{SE} = \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

Плоскости SAD и α параллельны, поэтому $\angle QRF = \angle SEO$, откуда

$$h = RF \sin \angle QRF = \frac{5EF}{6} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{40}} = \frac{\sqrt{310}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{310}}{4}$.

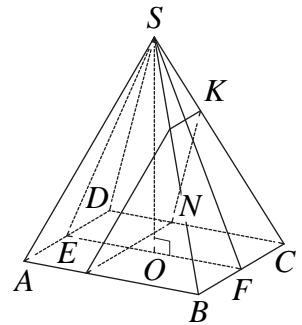


Рис. 1

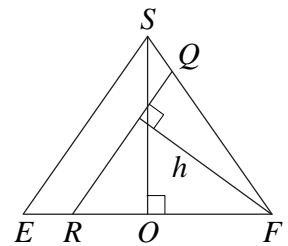


Рис. 2

Примеры оценивания выполнения задания 13

Пример 13.1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

Решение.

$$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$BM = \sqrt{BF^2 + FM^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$\frac{BF}{BE} = \frac{4}{6} \Rightarrow 4BE = 18\sqrt{3} \Rightarrow BE = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$BE = \frac{6}{4} \Rightarrow BE = \frac{3}{2}$

$6BE = 12\sqrt{3} \Rightarrow BE = 2\sqrt{3}$

Маш

$ABCA_1B_1C_1$ – прав. трехгр. призма.
 $AA_1 = 3, AB = 6, AK = 2,$
 $B_1L = 2, A_1M = MC_1 = 3.$

γ – плоскость $\parallel AC$ и
 через сечения $K, L.$

а) Док-те $BM \perp \gamma$

б) $V = AKK_1LL_1$

$RG \parallel BF \Rightarrow RE = B, B. \quad ZG = FB - (FZ + GB) \quad FZ = GB = \sqrt{3} = \frac{1}{2}ZB$
 $ZG = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}. \quad RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$

~~$\triangle BFM \sim \triangle BOZ$ по отн. $\angle MBF$ и $\angle BOZ$ и $\angle BFM = \angle BOZ$~~

$\triangle EOB = \triangle MOR$ т.к. $\angle MOR = \angle EOB$ (т.к. они вертикальные);
 $ZB = MR = 2\sqrt{3}, \angle ZBM = \angle OMR$ т.к. это вкр. напрес. сн. углы
 при 2-х \parallel прес. B_1M и FB . следовательно $RO = OE$

по теореме Пифагора. $ZB = \sqrt{BO^2 + ZO^2} = 2\sqrt{3} = \sqrt{3 + 9} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}$

след $\triangle BEO$ – прямоугол: след $BO \perp ZR$. след $BO \perp \gamma$ след $BM \perp \gamma$.

$V = \frac{1}{3} MO \cdot S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot ((KK_1 + LL_1) \cdot RZ) = \frac{1}{3} \cdot (2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
 $= 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\sqrt{217}$

Объем: $6\sqrt{3}$.

Комментарий

Доказательство утверждения в пункте а не обосновано. С использованием утверждения пункта а верно получен ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 1 балл.

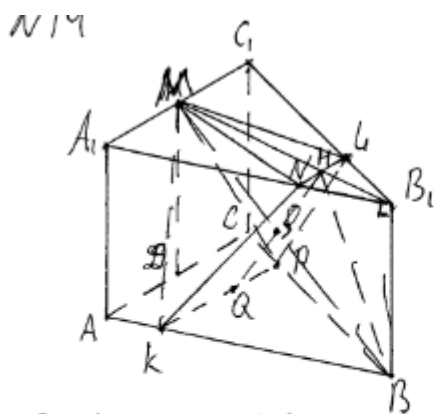
Пример 13.2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.



а) BM перпендикулярна любой прямой, параллельной AC и лежащей в плоскости (ABC) по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$
 Проведём QN ($QN \perp NL$ и $QN \perp NK$)

$QM \perp KP$; $QN \cap BM = O$ $\Delta OQM \sim \Delta B_1BM$ по т. Пифагора $\Rightarrow \angle MOQ = \angle MB_1B = 90^\circ$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QN \Rightarrow BM \perp \gamma$. т.т.д.

б) BO делит BM пополам из ΔBMB_1 по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$ Из ΔB_1LN по т. Пифагора $B_1N = \sqrt{3}$ Из ΔBNB_1 по т. Пифагора $BN = 2\sqrt{3}$ Из ΔBON по т. Пифагора $ON = \sqrt{3}$. BO делит QN пополам $\Rightarrow QN = 2ON = 2\sqrt{3}$

$$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

($KPLN$ – р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

Комментарий

Утверждение в пункте а не доказано. В основе решения пункта б лежит необоснованное утверждение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

3) $\triangle BDK \sim \triangle BCA$ по 2-м углам ($\angle B$ -общий, $\angle BDK = \angle BAC$ как соотв.) $k = \frac{2}{3}$ 4) аналогично $\triangle B_1EL \sim \triangle B_1A_1C_1$ $k = \frac{1}{3}$
 5) $EO = \frac{2}{3} BF$ и (4) $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M$ $BO = \frac{2}{3} BF$
~~6) $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$~~

7) $\triangle O_1NM = \triangle BON$ по 2-м углам и стороне между ними ($\angle MNO_1 = \angle NOB$ как накл. $\angle O_1MB = \angle MBO$ как н.л. $O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$)

Вычисления

1) $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3) $O_1T \perp BF$ 6 (BFM) 4) $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

5) по г. Пиф. $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow NM = BN = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$.

6) $O_1O = \sqrt{9+9} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1H = HO = \sqrt{3}$.

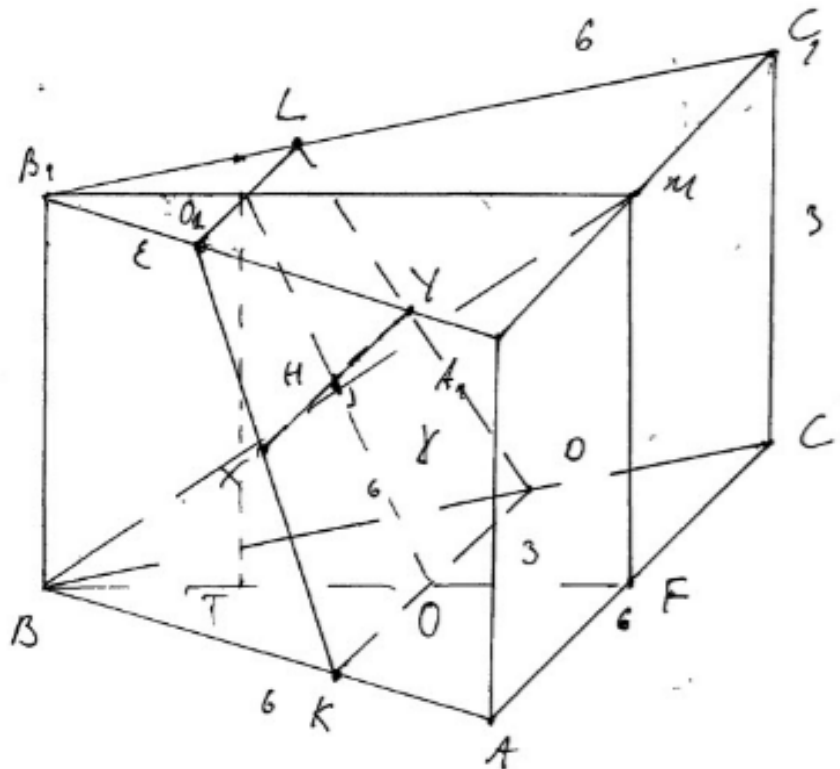
7) по теор. обратной теореме Пифагора т.к.

$O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9 + 3 = 12$, то $\angle O_1HM = 90^\circ$ и $O_1H \perp MN$.

8) $MP \perp AE$ (т.к. призма правильная) и $MF \perp KD$ т.к. $KD \parallel AE$.

9) т.к. $EL \parallel KD$, то $ELKD$ – трапеция

10) XY – средняя линия трап. $ELKD$ и $O_1H = HO \Rightarrow H \in XY$ в плоскости (EKD) 11) т.к. $XK \parallel YL$, то $XKYO$ см. на обороте



2) $XY \parallel KD$ $MF \perp KD$ и $MF \perp BF$, тогда $MF \perp (BKF)$
 ~~$MF \perp KD$~~ ~~$MF \perp BF$~~ ~~$MF \perp (BKF)$~~ ~~$MF \perp KD$~~ ~~$MF \perp BF$~~ ~~$MF \perp (BKF)$~~ ~~$MF \perp KD$~~ ~~$MF \perp BF$~~ ~~$MF \perp (BKF)$~~
 пр. и пл. $KD \perp (BFM) \Rightarrow$ любая прямая в пл.
 (BFM) перпендикулярна $KD \Rightarrow BM \perp KD$ и
 $BM \perp XY$ т.е. $(KDL) = \gamma$

13) т.к. $BM \perp XY$ и $BM \perp O_1O$, то по прямой
 пер. пр. и пл. $BM \perp (KDL)$ и $BM \perp \gamma$ ч.т.д.

д) 1) $S_{\triangle KOD} = \frac{1}{2} (EL + KD) \cdot O_1O$

2) $EL = A_1C_1 \cdot n_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

3) $KO = AC \cdot n_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

4) $S_{\triangle KOD} = \frac{1}{2} (2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5) $V_{MSEKO} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

Ответ: $6\sqrt{3}$ куб. ед.

Комментарий

Доказательство утверждения в пункте а содержит неточности. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

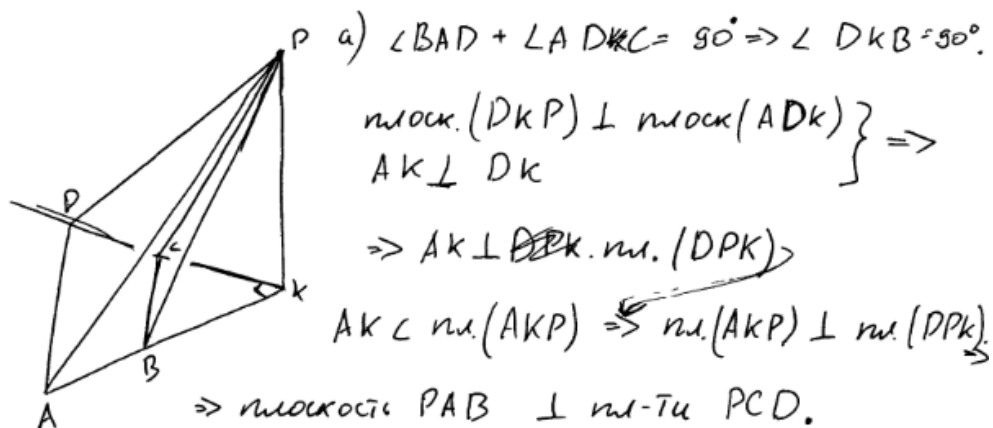
Пример 13.4

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.



б) $AB = BC = CD = 4$.

$AB = CD \Rightarrow$ трапеция - равносторонняя $\Rightarrow \angle KAD = \angle HDK \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$AK \perp \text{пл. (DPK)} \Rightarrow AK \perp PK$.

$\left. \begin{array}{l} \text{пл. (AKP)} \perp \text{пл. (ADK)} \\ AK \perp DK \end{array} \right\} \Rightarrow DK \perp \text{пл. (AKP)} \Rightarrow DK \perp PK$

$\left. \begin{array}{l} AK \perp PK \\ DK \perp PK \end{array} \right\} \Rightarrow PK \perp \text{пл. (ADK)} \Rightarrow PK$ - высота.

$V(KBCP) = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$
 $= 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $V_{KBCP} = 12$.

Комментарий

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.5

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

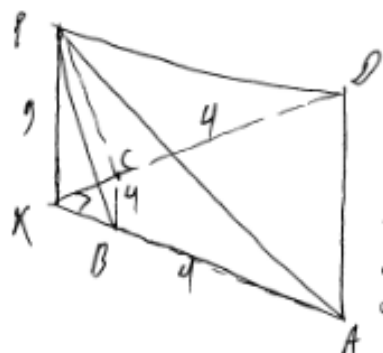
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.

⑭ Дано:
 $PABCD$ – 4-х. пирамиды
 $ABCD$ – трапеция ($A \parallel BC$)
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $AB \cap CD = K$

а) Доказать: $PAB \perp PCD$
 б) Найти: V_{KBCP} , если
 $AB = BC = CD = 4$, $PK = 9$



а) PK – высота пирамиды
 $\angle PKA = 180^\circ - (\angle PKB + \angle PKC) = 90^\circ$
 Заметим, что $\angle PKA$ – линейный

угол вертикального угла между плоскостями PAB и PCD ,
 в.к. $DK \perp PK$ и $AK \perp PK$.

$\angle PKA = 90^\circ \Rightarrow PAB \perp PCD$, ч.т.д.

б) $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$;

$$S_{ABCD} = \frac{4+8}{2} \sqrt{12} = 46 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{KCB} \approx \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow \triangle KCB \sim \triangle KDA \Rightarrow S_{KCB} = \frac{S_{AKD}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KCB} = \frac{12\sqrt{3} + S_{KCB}}{4} \Rightarrow \frac{3S_{KCB}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$$

$$V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Ответ: $12\sqrt{3}$

Комментарий

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б есть ошибочное утверждение, что привело к неверному ответу.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.6

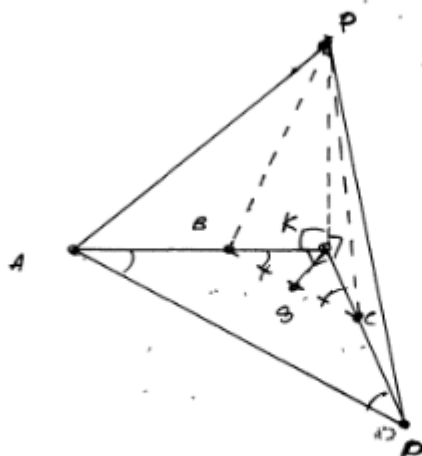
Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Ответ: б) 12.

114



Дано:
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $(PAB) \perp (ADK)$
 $(PCD) \perp (ADK)$
 $ABCD$ – трапеция
 $K = AB \cap CD$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$

б) $V_{KBCP} = ?$, если:
 $AB = BC = CD = 4$
 $PK = 9$

а) $BC \parallel AD$ (т.к. $ABCD$ – трапеция) $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle KAD \\ \angle KCB = \angle KDA \end{cases}$

(как внутр. одностор. и внутр. внешн. одностор. внешн. и внутр. при секущей AK и KD)

$\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90^\circ$ (по условию $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$ ($180^\circ - \angle KBC - \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$)

Т.к. $PAB \perp ADK$ и $PKD \perp ADK$, то

$\angle AKP = \angle DKP = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PK$ и $AK \perp DK \Rightarrow$

$\Rightarrow PAK \perp PKD$ т.н.д.

б) $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – равнобедр. трапеция.

$\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$

$\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равноб. трап.)

$\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle KBC$ – равнобедр. прямоугольной треуго.

Опустим из K перпендикуляр на BC ; $KS \perp BC$; $BS = BC$ (медиана = высота в равнобедр. \triangle) $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{KBCP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle KBC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 9 = 12$ Ответ: 12.

Комментарий

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.7

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{310}}{4}$.

а)



$\Delta CNK \sim \Delta CDS$

(теорема Фалеса)

$\Rightarrow NK \parallel DS$; (~~DSA~~) $DS \in (DSA) \Rightarrow NK \parallel (DSA)$

Проведём $NP \parallel DA$. Построим $PT \parallel SA$

$(SA \in (DSA) \Rightarrow (NPT) \parallel (SDA)$; $(NPT) = (\alpha)$

$\Rightarrow (\alpha) \parallel (SDA)$ Прямая $NP \parallel AD$ (по

построению.) $DA \parallel CB$ (т.к. $SABCD$ - правильная

пирамида.) $\Rightarrow NP \parallel CB$, так $NP \in (\alpha) \Rightarrow$

$(\alpha) \parallel CB$ и т.д.

б) Построим $LO \perp CB$; $LO \in CB$. (O - пересечение диаг. осн пирамиды)

Построим $\perp LG$ к (α) LG - расстояние до (α) (теорема о 3-х перпендикулярах)

LG - перпендикуляр; OB - проекция; LO - касательная.

Комментарий

Утверждение в пункте а) доказано. В решении есть неточности в обозначении длин отрезков на первом чертеже и неоднозначность использования ссылки на теорему Фалеса. Решение пункта б) не закончено.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.8

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой SA .

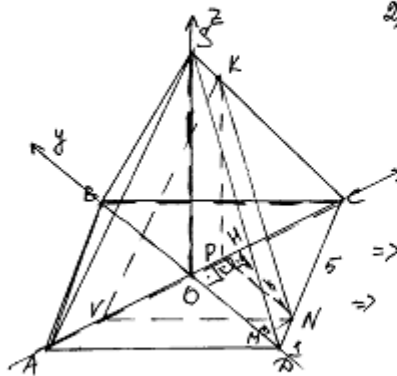
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{310}}{4}$.

1) $SABCD$ - правильная четырёхугольная пирамида \Rightarrow

\Rightarrow 1. Основание - правильный четырёхугольник, т.е. квадрат, 2. Высота пирамиды проецируется в центр основания, т.е. в точку O диагоналей квадрата, 3. Боковые стороны равны, 4. Боковые грани равные \triangle и треугольники (\triangle - равнобедренные)



2) $\triangle(ASC)$. $KV \parallel AS$

$P! \triangle ASC$ и $\triangle CKV$.

1 $\angle SCA$ - общий
2 $\angle KVC = \angle SAC$ как соответственные углы, образованные $KV \parallel AS$ и секущей AC

$\Rightarrow \triangle ASC \sim \triangle CKV$ по 1 признаку \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{CK}{CS} = \frac{CV}{AC} \quad (\text{из квадрата } AC = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ как диагональ})$$

$$CK:KS = 5:1 \text{ по условию} \Rightarrow CK = \frac{7.5}{6}, SK = \frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7.5}{6.7} = \frac{CV}{6\sqrt{2}} \Rightarrow CV = 5\sqrt{2} \Rightarrow OV = 2\sqrt{2} \quad (CO = 3\sqrt{2} = OB - CO = AO)$$

3) $\left. \begin{array}{l} \triangle KNV \\ KV \parallel AS \\ AS \notin (KNV) \end{array} \right\} \Rightarrow AS \parallel (KNV)$

(KNV) содержит т. K и N и $\parallel AS \Rightarrow (KNV)$ искомая плоскость α

4) В грани $ABCD$: $NH \perp OC$ и $NM \perp OD$

$P!$ $\triangle CHN$: $\angle HCN = 45^\circ$ т.к. AC - диагональ квадрата:

$$\Rightarrow \cos \angle HCN = \frac{HN}{NC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (NC = 5, ND = 1 \text{ т.к. } DN:NC = 1:5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HN = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$P!$ $\triangle NMD$: $\angle NDM = 45^\circ$ (BD - диагональ квадрата)

$$\Rightarrow \cos \angle NDM = \frac{MD}{DN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

5) $\triangle(ASC) \parallel SO$

$SO \perp (ABC)$, $KP \parallel SO \Rightarrow KP \perp (ABC)$; $PC \in (ABC)$; $KP \perp (ABC) \Rightarrow KP \perp PC$

$\Rightarrow \Delta KPC$ - прямоугольный

$P! \Delta SOC$ и ΔKPC $KP \parallel SO \Rightarrow$ по теореме о пропорциях отрезков
 отрезков $\frac{CH}{CK} = \frac{HP}{K3} \Rightarrow \frac{CP}{OP} = \frac{CK}{K3} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{CP}{OP} = \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{CP}{5} = \frac{OP}{1} \Rightarrow \frac{CP}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow CP = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow CP = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$CH = CP, OH = OP, C \in OC, O \in OC, H \in OC, P \in OC \Rightarrow$

\Rightarrow точки H и P совпадают

По теореме Лавалора из кр/чл $\Delta KPC: KP = \frac{5\sqrt{31}}{6}$

б) $V(-2\sqrt{2}; 0; 0); N(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0); K(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{5\sqrt{31}}{6})$

$B(\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 0); C(3\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$

$\vec{BC} \{ 3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}; 0 \}; \vec{VN} \{ \frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0 \}$

7) $\cos \angle (BC; VN) = |\cos \angle (\vec{BC}; \vec{VN})| = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{VN}|}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{VN}|} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle (BC; VN) = 0^\circ \Rightarrow BC \parallel VN$

8) $Ax + By + Cz + D = 0$

$\begin{cases} -2\sqrt{2}A + D = 0 \Rightarrow D = 2\sqrt{2}A \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A - \frac{5\sqrt{2}}{2}B + D = 0 \Rightarrow A = B \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{5\sqrt{31}}{6}C + D = 0 \Rightarrow C = -\frac{8\sqrt{2}}{31}A \end{cases}$

$Ax + Ay - \frac{3\sqrt{2}}{31}Az + 2\sqrt{2}A = 0 \quad / \sqrt{A} : A$

$x + y - \frac{3\sqrt{2}}{31}z + 2\sqrt{2} = 0$ - уравнение α

$g(C; \alpha) = \frac{|-\frac{3\sqrt{2}}{31} \cdot 3\sqrt{2} + 0 - 0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{9 \cdot 2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$

Ответ: б) $\frac{5}{3}$

Комментарий

Утверждение в пункте а доказано. В решении пункта б есть неточность в решении системы уравнений (выражение C через A), а при применении формулы расстояния от точки до плоскости неверно найден модуль вектора нормали (не относится к вычислительной ошибке).

Оценка эксперта: 1 балл.

3. Критерии проверки и оценка решений задания 14

Задание № 14 – это неравенство: дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставить оценку «0 баллов».**

Задача 14 (демонстрационный вариант 2022 г.)

Решите неравенство $\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2 + 7$ принимает положительные значения, при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2 + 7}{x^2 + x + 1} \geq \frac{8x + 35}{x + 5}; \quad \frac{8x^3 + 40x^2 + 7x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \geq \frac{8x^3 + 43x^2 + 43x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)};$$

$$\frac{3x^2 + 36x}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0; \quad \frac{3x(x + 12)}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0,$$

откуда $x \leq -12$; $-5 < x \leq 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$,

получаем: $x \leq -12$; $-\frac{35}{8} < x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -12]$; $\left(-\frac{35}{8}; 0\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

Задание 1

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4}; \quad t - 6 - \frac{9t - 37}{(t - 3)(t - 4)} - \frac{t - 3}{(t - 3)(t - 4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10}{t - 3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4; \quad \frac{(t - 1)(t - 8)}{t - 3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4,$$

откуда $t \leq 1$; $3 < t < 4$; $4 < t \leq 8$.

При $t \leq 1$ получим: $2^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.

При $3 < t < 4$ получим: $3 < 2^x < 4$, откуда $\log_2 3 < x < 2$.

При $4 < t \leq 8$ получим: $4 < 2^x \leq 8$, откуда $2 < x \leq 3$.

Решение исходного неравенства:

$$x \leq 0; \log_2 3 < x < 2; 2 < x \leq 3.$$

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

Задание 2

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$.

Решение.

Пусть $t = \log_4 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{t^2-9}; \quad \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)} + \frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)} - \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)} \geq 0;$$
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)} \geq 0; \quad \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0, \text{ откуда } t < -3; t = 1; t > 3.$$

При $t < -3$ получим: $\log_4 x < -3$, откуда $0 < x < \frac{1}{64}$.

При $t = 1$ получим: $\log_4 x = 1$, откуда $x = 4$.

При $t > 3$ получим: $\log_4 x > 3$, откуда $x > 64$.

Решение исходного неравенства: $0 < x < \frac{1}{64}$; $x = 4$; $x > 64$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{64}\right)$; 4; $(64; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 3

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(5(1-x)) \geq \log_3((2-x)(1-x)) - \log_3(x+4);$$

$$\log_3 5 + \log_3(1-x) \geq \log_3(2-x) + \log_3(1-x) - \log_3(x+4).$$

Неравенство определено при $-4 < x < 1$, поэтому при $-4 < x < 1$ неравенство принимает вид:

$$5 \geq \frac{2-x}{x+4}; \frac{6x+18}{x+4} \geq 0,$$

откуда $x < -4$; $x \geq -3$. Учитывая ограничение $-4 < x < 1$, получаем:
 $-3 \leq x < 1$.

Ответ: $[-3; 1)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

Примеры оценивания решений задания 14

Пример 14.1

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

№15.

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4};$$

$2^x = t;$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} \leq \frac{1}{t-4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37 + t - 3}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t-6)(t-3) - 10}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$0 < 2^x < 1$ $3 < 2^x < 4$ $4 < 2^x \leq 8$

$x \leq 0;$ $\begin{cases} x > \log_2 3; \\ x < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2; \\ x \leq 3; \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.2

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$.

$$15) \quad 2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть $2^x = t$ Тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} \leq \frac{1}{t-4}$$

ОДЗ $\begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \neq 4 \\ 2^x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \log_2 3 \end{cases}$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t-1)(t-8)}{t-3} \leq 0$$

Обратно

$$\frac{(2^x - 1)(2^x - 8)}{2^x - 3} \leq 0$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$

Комментарий

В решении содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Получен неверный ответ, но он отличается от верного только исключением точки 3.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.3

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$.

$$15. \quad 2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть $2^x = t$, то $t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} - \frac{1}{t - 4} \leq 0$

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \quad (t-3)(t-4)$$

$$D = 49 - 4 \cdot 12 = 7 \quad t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} - \frac{1}{t-4} \leq 0$$

$$t_1 = \frac{7-1}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$(t-3)(t-4) \cdot t^2 - 7t + 12 - (9t-37) - (t-3) \leq 0$$

$$(t^3 - 7t^2 + 12t - 6t^2 + 92t - 72) - (9t - 37) - (t - 3) \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3 \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 44t - 32 \leq 0$$

Схема Горнера: Пусть $t_1 = 1$, то

$$1 - 13 + 44 - 32 = 0 \quad 1 - 13 + 44 - 32 = 0 \quad - \text{похожим}$$

	1	-13	44	-32
1	1	-12	32	0

$$(t-1)(t^2 - 12t + 32) \leq 0$$

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 32 = 144 - 128 = 16$$

$$t_2 = \frac{12-4}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{12+4}{2} = 8$$

$$t_1 = 1$$

$$t_1 = 4$$

$$t_1 = 8$$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 4$$

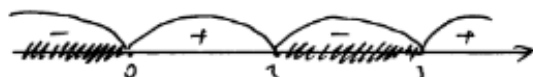
$$2^x = 8$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_1 = 3$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$$



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$

Комментарий

При решении неравенства допущена ошибка – неравносильный переход. Это привело к неверному ответу.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.4

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{64}); 4; (64; +\infty)$.

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x - 3 \neq 0 \\ \log_4(64x) \neq 0 \\ \log_4^2 x - 9 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \\ 64x \neq 1 \\ (\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \\ x \neq \frac{1}{64} \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \\ x \neq \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$x \in (0; \frac{1}{64}) \cup (\frac{1}{64}; 64) \cup (64; +\infty)$$

$$\frac{\log_4 x + 3}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 x + 3} \geq \frac{4 \log_4 x + 16}{(\log_4 x - 3)(\log_4 x + 3)}$$

$$t = \log_4 x \quad t \neq \pm 3$$

$$\frac{t+3}{t-3} + \frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}$$

$$\frac{(t+3)^2 + (t-3)^2 - 4t - 16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 6t + 9 + t^2 - 6t + 9 - 4t - 16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \quad \frac{t^2 - 2t + 1}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \quad \frac{(t-1)^2}{(t+3)(t-3)} \geq 0$$

$$t \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (3; +\infty) \Rightarrow \log_4 x \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (3; +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (0; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$$

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.5

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{64}); 4; (64; +\infty)$.

$$15. \frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}$$

ОДЗ. $x > 0$, $x \in (0; +\infty)$

$$\frac{\log_4 64 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 64 + \log_4 x} - \frac{4 \log_4 x + 16}{\log_4^2 x - 9} \geq 0$$

$$\frac{3 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{3 + \log_4 x} - \frac{4 \log_4 x + 16}{\log_4^2 x - 9} \geq 0$$

Введем $\log_4 x = t$, тогда

$$\frac{3+t}{t-3} + \frac{t-3}{3+t} - \frac{4t+16}{t^2-9} \geq 0$$

$$\frac{(t+3)(t+3) + (t-3)(t-3)}{(t-3)(t+3)} - \frac{4t+16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{t^2+3t+3t+9+t^2-3t-3t+9-4t-16}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$

$$\frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$$



$$\log_4 x < -3$$

$$x < \frac{1}{64}$$

$$\log_4 x = 1$$

$$x = 4$$

$$\log_4 x > 3$$

$$x > 64$$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{64}) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$

Комментарий

При выполнении задания допущена ошибка в решении простейшего логарифмического неравенства. Получен неверный ответ. В решении содержится ошибочное утверждение, связанное с ОДЗ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.6

Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$.

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$.

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\frac{(3^{2x} - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4)(3^x - 9) + (2 \cdot 3 \cdot 3^x - 51)(3^x - 5) - (3^x - 5)(3^x + 5)(3^x - 9)}{(3^x - 5)(3^x - 9)} \leq 0$$

$$\frac{3^{3x} - 6 \cdot 3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^{2x} + 54 \cdot 3^x - 36 + 6 \cdot 3^{2x} - 51 \cdot 3^x - 30 \cdot 3^x + 255 - (3^{2x} - 25)(3^x - 9)}{(3^x - 3^{\log_3 5})(3^x - 3^2)} \leq 0$$

знаки $(3^x - 3^{\log_3 5})$ и $(3^x - 3^2)$ совпадают со знаками $(x - \log_3 5)$ и $(x - 2)$ соответственно

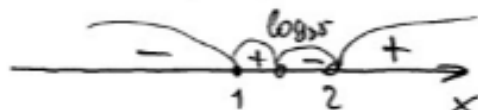
$$\frac{3^{3x} - 9 \cdot 3^{2x} - 23 \cdot 3^x + 219 - 3^{3x} + 8 \cdot 3^{2x} + 25 \cdot 3^x - 225}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{2 \cdot 3^x - 6}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0; \quad \frac{3^x - 3^1}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0$$

знак $(3^x - 3^1)$ совпадает со знаком $(x - 1)$

$$\frac{x - 1}{(x - \log_3 5)(x - 2)} \leq 0$$

$$1 < \log_3 5 < 2$$



$$\Rightarrow x \in \{-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$$

$$\text{Ответ: } \{-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$$

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ. Левая круглая скобка в ответе может быть прочитана как фигурная, но это не является основанием для того, чтобы считать ответ неверным.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.7

Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$.

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$.

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

$$\begin{aligned} 3^x - 9 > 0 \\ 3^x = 9 \\ x > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x - 5 > 0 \\ 3^x = 5 \end{aligned}$$

$$x > \log_3 5$$

$$\frac{3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^x \cdot 3 - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$$

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} \leq t + 5$$

$$\frac{(t^2 - 6t + 4) \cdot (t - 9) + (6t - 51)(t - 5)}{(t - 5)(t - 9)} \leq (t + 5)(t - 5)(t - 9)$$

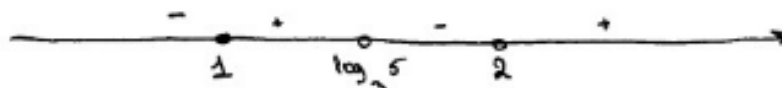
$$\begin{aligned} t^3 - 6t^2 + 4t - 9t^2 + 54t - 36 + 6t^2 - 30t - 51t + 255 &\leq t^3 - 25t - 9t^2 + 225 \\ \cancel{t^3} - \cancel{6t^2} + 4t - \cancel{9t^2} + 54t - 36 + \cancel{6t^2} - 30t - 51t + 255 - \cancel{t^3} + 25t + \cancel{9t^2} - 225 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$2t - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} 2t &= 6 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$$3^x = 3$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$



Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Комментарий

В решении допущены ошибочные утверждения, присутствует неравносильный переход при решении неравенств. Получен ответ, совпадающий с верным.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.8

Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$.

Ответ: $(-\infty; 1]; (\log_3 5; 2)$.

$$\begin{aligned} \frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} &\leq 3^x + 5 \\ \frac{9^x - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^x - 51}{3^x - 9} &\leq 3^x + 5 \\ 3^x = t; t > 0 & \\ \frac{t^2 - 6t + 4}{t - 5} + \frac{6t - 51}{t - 9} - t - 5 &\leq 0 \\ \frac{(t^2 - 6t + 4)(t - 9) + (6t - 51)(t - 5) - (t + 5)(t - 5)(t - 9)}{(t - 5)(t - 9)} &\leq 0 \\ \frac{2(t - 18)}{(t - 5)(t - 9)} &\leq 0 \end{aligned}$$

ОДЗ:
 $3^x - 5 \neq 0$
 $3^x \neq 5$
 $x \neq \log_3 5$
 $3^x - 9 \neq 0$
 $3^x \neq 9$
 $x \neq 2$

$t \in (0; 5) \cup (9; 18]$
 $3^x \in (0; 5) \cup (9; 18]$
 $x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_3 5) \cup (2; \log_3 18]$

Комментарий

Ответ неверный. При преобразовании числителя допущена вычислительная ошибка, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.9

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3; 1)$.

$$\text{N15. } \log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

ОДЗ:

$$5(1-x) > 0$$

$$x^2-3x+2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0$$

$$x > -4$$

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3 \frac{x^2-3x+2}{x+4}$$

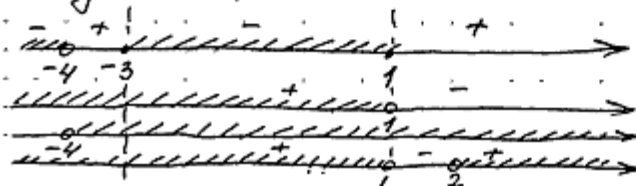
$3 > 1 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает \Rightarrow

$$\Rightarrow 5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4} \Rightarrow \frac{(5-5x)(x+4) - x^2 + 3x - 2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{5x+20-5x^2-20x-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{-6x^2-12x+18}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x+4} \leq 0$$

~~метод интервалов~~



$$\Rightarrow x \in [-3; 1)$$

Ответ: $[-3; 1)$

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.10

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3; 1)$.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4) \quad \text{w 15.}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5-5x > 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < 1; x > 2 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-4; 1); (2; +\infty)$$

$$\log_3(5-5x) + \log_3(x+4) \geq \log_3(x^2-3x+2)$$

$$\log_3(5-5x) \cdot (x+4) \geq \log_3(x^2-3x+2)$$

\log_3 - монотонно возрастающая функция \Rightarrow
знак неравенства не меняем.

$$(5-5x) \cdot (x+4) \geq x^2-3x+2$$

$$-6x^2-12x+18 \geq 0 \quad | : -6$$

$$x^2+2x-3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \leq 0$$



$$\begin{cases} x \in [-3; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-4; 1); (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 1)$$

$$\text{Ответ: } [-3; 1)$$

Комментарий

Система неравенств решена неверно (не вычислительная ошибка).

Оценка эксперта: 0 баллов.

4. Критерии проверки и оценка решений задания 15

Задание № 15 – это текстовая задача с экономическим содержанием.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жёсткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Задача 15 (демонстрационный вариант 2022 г.)

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб.

Решение. По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,6k; 0,4k; 0,3k; 0,2k; 0,1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,6; 0,6k - 0,4; 0,4k - 0,3; 0,3k - 0,2; 0,2k - 0,1; 0,1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} & k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = \\ & = (k - 1)(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) + 1 = 2,6(k - 1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб., значит,

$$2,6(k - 1) + 1 < 1,2; 2,6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1,2; r < 7 \frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число процентов – 7.

Ответ: 7.

Задание 1

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} & k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ & = (k - 1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k - 1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб., значит,

$$4,5(k - 1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 5. Значит, искомое число процентов – 5.

Ответ: 5.

Задание 2

В июле 2021 г. планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 руб., то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 руб., то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S руб., а ежегодные выплаты X руб.,

$k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S, kS - X, k^2S - kX - X, k^3S - k^2X - kX - X, k^4S - k^3X - k^2X - kX - X.$$

Таким образом, если долг будет выплачен двумя равными платежами X_2 , то

$$X_2 = \frac{k^2 \cdot (k-1)}{k^2 - 1} \cdot S = 106\,964.$$

Если долг будет выплачен четырьмя равными платежами X_4 , то

$$X_4 = \frac{k^4 \cdot (k-1)}{k^4 - 1} \cdot S = 58\,564.$$

Таким образом, $\frac{X_4}{X_2} = \frac{k^2}{k^2 + 1} = \frac{58\,564}{106\,964} = \frac{121}{221}$, откуда $k^2 = \frac{121}{100}$; $k = 1,1$.

Значит, $r = 10$.

Ответ: 10.

Задание 3

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{38S}{39}, \dots, \frac{2S}{39}, \frac{S}{39}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{38kS}{39}, \dots, \frac{2kS}{39}, \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{39}, \frac{38(k-1)S + S}{39}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{39}, \frac{(k-1)S + S}{39}.$$

Всего следует выплатить $S + S(k-1)\left(1 + \frac{38}{39} + \dots + \frac{2}{39} + \frac{1}{39}\right) = S(1 + 20(k-1))$.

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1) = 0,2; \quad k = 1,01; \quad r = 1.$$

Ответ: 1.

Примеры оценивания решений задания 15

Пример 15.1

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг(в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

месяц	сумма долга 1-го числа (млн р)	сумма долга 15-го числа	сумма выплат
1		1 млн	
2	$1 + 1 \cdot r$	0,9	$1 + 1 \cdot r - 0,9$
3	$0,9 + 0,9 \cdot r$	0,8	$0,9 + 0,9 \cdot r - 0,8$
4	$0,8 + 0,8 \cdot r$	0,7	$0,8 + 0,8 \cdot r - 0,7$
5	$0,7 + 0,7 \cdot r$	0,6	$0,7 + 0,7 \cdot r - 0,6$
6	$0,6 + 0,6 \cdot r$	0,5	$0,6 + 0,6 \cdot r - 0,5$
7	$0,5 + 0,5 \cdot r$	0	$0,5 + 0,5 \cdot r$

тогда общая сумма выплат:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 1 \cdot r - 0,9 + 0,9 + 0,9 \cdot r - 0,8 + 0,8 + 0,8 \cdot r - 0,7 + 0,7 + 0,7 \cdot r - \\
 & - 0,6 + 0,6 + 0,6 \cdot r - 0,5 + 0,5 + 0,5 \cdot r = \\
 & = 1 + r + 0,9r + 0,8r + 0,7r + 0,6r + 0,5r = 1 + 4,5r
 \end{aligned}$$

общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн =>

$$\begin{aligned}
 & = 1 + 4,5r > 1,2 \\
 & \quad 4,5r > 0,2 \\
 & \quad r > 2,25
 \end{aligned}$$

наименьшее $r = 3$. т.к. r – целое число, то

ответ: r наименьшее = 3

Комментарий

Модель построена неверно. Если подставить в таблицу число 3 вместо r , то сумма долга уже на 1-е число второго месяца должна составить 4 млн руб. Кроме того, еще и неравенство решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.2

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

77) Всего было 6 выплат: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 > 1,2$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$$

r	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	S
7	0,12	0,163	0,156	0,149	0,142	0,135	1,315
5	0,15	0,185	0,14	0,138	0,13	0,125	1,225
4	0,14	0,126	0,132	0,122	0,124	0,12	1,118

$$P_1 = (1 + \frac{r}{100}) - 0,9$$

$$P_2 = 0,9(1 + \frac{r}{100}) - 0,6$$

$$P_3 = 0,8(1 + \frac{r}{100}) - 0,4$$

$$P_4 = 0,7(1 + \frac{r}{100}) - 0,6$$

$$P_5 = 0,6(1 + \frac{r}{100}) - 0,5$$

$$P_6 = 0,5(1 + \frac{r}{100})$$

Наименьшим числом, при котором $S > 1,2$ является 5. При $r=4, S < 1,2$.

Ответ: 5

Комментарий

Модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.3

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, причём r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

Решение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1,2 \text{ млн, где } x - \text{выплата}$$

$$N = 1 - \text{сумма кредита}$$

$$r_{\min} = ?, \text{ где } r - \% \quad r \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = N + \frac{rN}{100} - 0,9 \quad ; \quad x_2 = 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 \quad ; \quad x_3 = 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 \quad ;$$

$$x_4 = 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 \quad ; \quad x_5 = 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 \quad ; \quad x_6 = 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100}$$

$$1 + \frac{r}{100} - 0,9 + 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 + 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 + 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 + 0,6 +$$

$$+ \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 + 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100} > 1,2$$

$$1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2 \quad ; \quad r > \frac{20}{3,5} \quad ; \quad \text{Ответ: } r = 5\%$$

$$\frac{3,5r}{100} > 0,2 \quad ; \quad r_{\min} = 5\%$$

Комментарий

Почти правильное решение, содержащее две ошибки: 1) $1 + \frac{4,5r}{100} > 1,2$, а не $1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2$; 2) $\frac{20}{3,5} > 5,7$, т.е. должно быть $r = 6$.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.4

В июле 2021 г. планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 руб., то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 руб., то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Ответ: 10.

17.	Пусть $(1 + \frac{r}{100}) = x$	
январь 2021	Sx	2 способ Sx
июль 2021	$Sx - 58564$	$Sx - 106964$
январь 2022	$Sx^2 - 58564x$	$Sx^2 - 106964x$
июль 2022	$Sx^2 - 58564x - 58564$	$Sx^2 - 106964x - 106964$
январь 2023	$Sx^3 - 58564x^2 - 58564x$	0
июль 2023	$Sx^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564$	0
январь 2024	$Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x$	0
июль 2024	$Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564$	0

$$\begin{cases} Sx^2 - 106964x - 106964 = 0 \\ Sx^4 - 58564x^3 - 58564x^2 - 58564x - 58564 = 0 \end{cases}$$

$$1) S = \frac{106964}{x} + \frac{106964}{x^2}$$

$$2) S = \frac{58564}{x} + \frac{58564}{x^2} + \frac{58564}{x^3} + \frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{106964}{x} + \frac{106964}{x^2} = \frac{58564}{x} + \frac{58564}{x^2} + \frac{58564}{x^3} + \frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{48400}{x} + \frac{48400}{x^2} - \frac{58564}{x^3} - \frac{58564}{x^4} = 0 \quad | \cdot x^4$$

$$48400x^3 + 48400x^2 - 58564x - 58564 = 0$$

$$48400x^2(x+1) - 58564(x+1) = 0$$

$$(x+1)(48400x^2 - 58564) = 0$$

$$x = -1, \text{ не подходит по условиям}$$

$$48400x^2 = 58564$$

$$x = \frac{292}{100}$$

$$\text{или } 3: (1 + \frac{r}{100}) = \frac{292}{100}$$

$$r = 10$$

Ответ: 10%.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.5

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

$$1 + \frac{r+0,7}{100} + \frac{r+0,6}{100} + \frac{r+0,5}{100} + \frac{r+0,4}{100} + \frac{r+0,3}{100} + \frac{r+0,2}{100} > 1,2$$
$$4,5 \frac{r}{100} > 0,2$$
$$9r > 0,4$$
$$\frac{r}{100} > \frac{4}{90}$$

Ближайшее к числу 4,45

$$\frac{4}{100} < \frac{4}{90} \text{ не подходит, берём на 1 больше.}$$
$$\frac{5}{100} = \frac{1}{20} > \frac{4}{90}$$
$$\frac{90}{1800} > \frac{80}{1800} \Rightarrow \text{Ответ. } r=5$$

Комментарий

В решении без объяснений записано неравенство. Неравенство явно не решено. Таким образом, решение недостаточно обоснованное.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.6

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Ответ: 1.

N17.

S - сумма, которую взяли в кредит
 x - сумма, на которую каждый раз уменьшается долг.

$\frac{r\%}{100} = n$, где $r\%$ - на возрастает долг.

Банк	выплаты
1. $S + Sn$	$Sn + x$
2. $S - x + (S - x)n$	$(S - x)n + x$
...	...
39. $S - 38x + (S - 38x)n$	$(S - 38x)n + x \Rightarrow S - 38x + (S - 38x)n = (S - 38x)n + x \Rightarrow$
40. 0	$\Rightarrow S = 39x$

Z - сумма выплат

По условию: $Z - S = 0,2S$

$$Z = Sn + x + (S - x)n + x + \dots + (S - 38x)n + x = 39x + n(39S - (x + 2x + \dots + 38x)) = 39x + n(39S - x(\frac{1+38}{2} \cdot 38)) = 39x + n \cdot 39S - n \cdot 39 \cdot 19 = 39x + n \cdot 39 \cdot 39x - n \cdot 39 \cdot 19x = 39x + 39 \cdot 20nx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39x + 39 \cdot 20nx - 39x = 0,2 \cdot 39x \Rightarrow 39 \cdot 20nx = 0,2 \cdot 39x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0,2}{20} = \frac{1}{100}; z = n \cdot 100 \Rightarrow r = 1\%$$

Ответ: 1%.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.7

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Ответ: 1.

Всего 39 месяцев. Пусть сумма, взятая в кредит — S . Пусть $k = \frac{r}{100}$ — коэффициент начисления процентов. Тогда, выплаты каждый месяц будут равны; из части долга $\frac{S}{39}$ + проценты за месяц. Проценты за месяц, вычисляются по формуле:

$$1 \text{ мес.} \quad 2 \text{ м.} \quad 3 \text{ м.} \quad \dots \quad 39 \text{ м.}$$
$$S \cdot k + \frac{38S \cdot k}{39} + \frac{37S \cdot k}{39} + \dots + \frac{S \cdot k}{39}$$

Применим формулу арифметической прогрессии

$$N = \left(\frac{x_1 + x_n}{2} \right) \cdot n$$

$$\text{Проценты} = \left(\frac{S \cdot k + \frac{S \cdot k}{39}}{2} \right) \cdot 39 = \frac{39S \cdot k + S \cdot k}{2} = \frac{40S \cdot k}{2} = 20S \cdot k$$

Часть долга:

$$\frac{S}{39} + \frac{S}{39} + \dots + \frac{S}{39} = S$$

Общие выплаты:

$$S + 20 \cdot S \cdot k = 1,2 \cdot S$$

$$20k = 0,2$$

$$k = 0,01$$

$$k = \frac{r}{100}$$

$$0,01 \cdot 100 = r \Rightarrow r = 1\%$$

Ответ: ~~1%~~ 1%

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

5. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 – это планиметрическая задача. В пункте *a* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

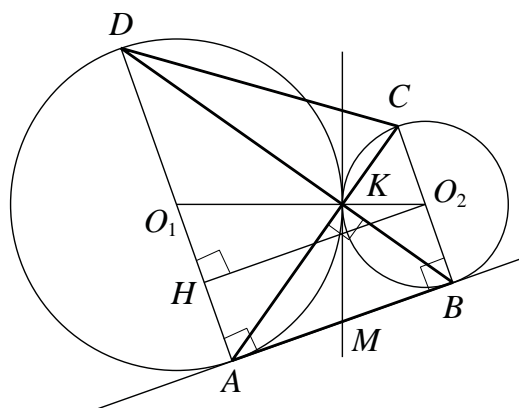
Задача 16 (демонстрационный вариант 2022 г.)

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD . Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

Задание 1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90^\circ,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC , BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

Поскольку

$$\begin{aligned} BK &= BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK = \\ &= EC \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} EC, \end{aligned}$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

Ответ: б) 3:4.

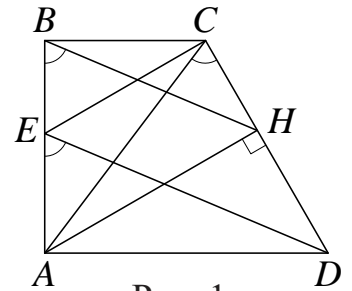


Рис. 1

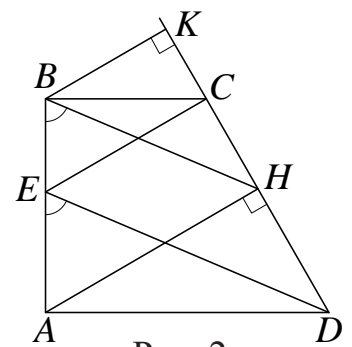


Рис. 2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
	<i>Максимальный балл</i> 3

Задание 2

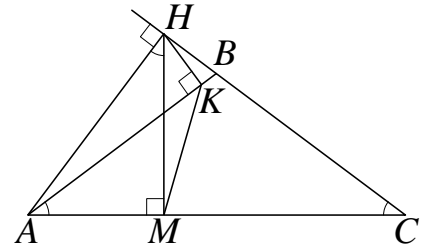
В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

- а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
 б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение.

а) Поскольку $\angle AMN = \angle AKN = 90^\circ$, около четырёхугольника $AMKN$ можно описать окружность с диаметром AN . Получаем:

$\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \angle HAC = \angle ANM$,
 поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.



б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

$$AM = AH \cdot \cos \angle HAM = AC \cdot \cos^2 \angle HAM = AC \cdot (1 - \cos^2 \angle ACB).$$

Поскольку $\cos \angle ACB = \frac{AC}{2BC} = \frac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задание 3

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Решение.

а) Поскольку BN – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\begin{aligned} \angle ABN &= 90^\circ - \angle ANB = 90^\circ - \angle ACB = \\ &= 90^\circ - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK. \end{aligned}$$

Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

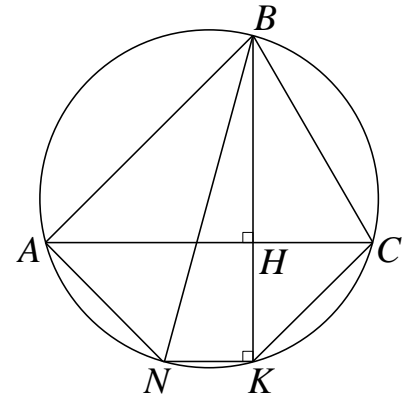
б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Имеем:

$$\begin{aligned} \angle ABN &= \angle CBH = 90^\circ - \angle HCB = 5^\circ, \\ \angle ABC &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 55^\circ; \\ \angle KBN &= \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45^\circ. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 16.1

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

№16.

Дано:

$ABCD$ - трапеция

$BC \perp AB \perp AD$

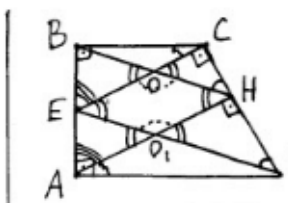
$AH \perp CD$

$CE \perp CD$

а) Доказать:

$BH \parallel ED$

Доказательство:



1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;

2) AB - секущая при двух \parallel прямых, значит $\angle BEC = \angle BAN$;

3) BH - тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle CON = \angle BNA$;

4) ED - тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;

5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle CON$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BNA$. т.к. $\angle CON = \angle BNA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ - параллелограмм, а его противоположные стороны $=$ и \parallel , значит, $BH \parallel ED$.

Комментарий

Имеется попытка доказательства утверждения пункта а. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла EO_1H : $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BNA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED , а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.2

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) $3:4$.

а) Пусть $\angle BDC = \alpha$, тогда $\angle ADE = 90^\circ - \alpha$. Пусть $\angle ODH = \beta$, тогда:

$\angle HOD = 90^\circ - \beta$; $\angle AOE = 90^\circ - \beta$. ($\angle AOE = \angle HOD$ как верш.)

$\angle EOH + \angle HOD = 180^\circ \Rightarrow \angle EOH = 90^\circ + \beta$

$\angle EOA = \angle MEO$ (как Н.Л.У) при $CE \parallel AH$ и секу $EO \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle MEO = 90^\circ - \beta$ $\angle KEM = 180^\circ - \angle MEO = 90^\circ + \beta$

$\angle KEM = \angle BMC$ (как соотв.) $\Rightarrow \angle EMH = \angle BMC = 90^\circ + \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle OHM = 360^\circ - (90^\circ + \beta) - (90^\circ + \beta) - (90^\circ - \beta) = 90^\circ - \beta$

$\angle CMH = 360^\circ - 180^\circ - \angle BMC = 90^\circ - \beta$

Если $\angle OHM = \angle CMH \Rightarrow \angle KEM = \angle EOH \Rightarrow EC \parallel BH$
 (т.к. равны соотв. углы.) ч.т.р

б) $\angle BCD = 120^\circ$.

$\angle ECD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCE = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle HAD$
 т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$. (аналог Н.Л.У) $\Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$.

$\angle AHD = 60^\circ \Rightarrow \angle MHD = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{1}{2} MD$
 $MD = 2 AD = MH + HD = MH + 0,5 AD \Rightarrow$
 $\Rightarrow MH = 1,5 AD$ $\Delta MHN \sim \Delta MED$ (по 2 угл.) \Rightarrow
 $\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Комментарий

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта а). Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED , а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте б) получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта а).

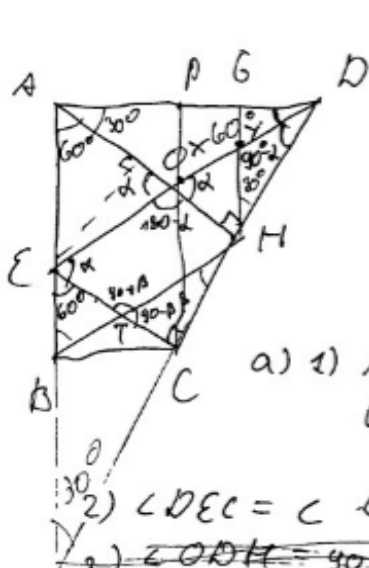
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.3

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
- Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.



№16.
 Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120^\circ$
 $CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$
 а) Д-ть: $BH \parallel ED$
 б) $\frac{BH}{ED} = ?$

а) 1) $AH \perp CD$
 $CE \perp CD$ } \Rightarrow покр. пер. прямых $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle ODH$ как соотв.

3) $\angle ODH = 30^\circ = \alpha$

4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ 5) ~~$\triangle BET$~~ ~~суть~~

5) $\triangle BET \sim \triangle BAN$ по 2-м углам ($\angle BAN$ - общий, $\angle BET = \angle BAN$ как соотв.) k - коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$

$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$

7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу α и 2-м сторонам

($\angle A$ - общий; $\frac{AO}{AH} = \frac{1-k}{1}$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) \Rightarrow

$\Rightarrow \angle AEO = \angle ABH$

8) ~~$\triangle BET$~~ т.к. т.к. $\angle AEO = \angle ABH$, то

по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ ξ . т. д.

Комментарий

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта а опирается на дополнительное условие из пункта б.

Оценка эксперта: 0 баллов.

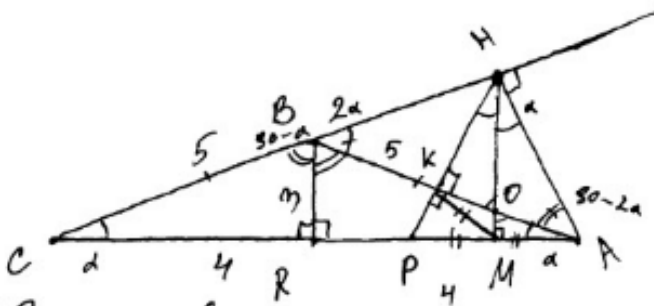
Пример 16.4

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и HM соответственно.

- а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
 б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

16.



а) Доказательство:

Пусть $\angle BCA = \alpha$.
 Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный,
 то и $\angle BAC = \alpha$.

$$\angle CBA = 180 - 2\alpha$$

Пусть $BR \perp AC$, тогда $CR = RA$,
 $\angle CBR = \angle RBA = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

$\angle ABH = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$
 Т.к. $\triangle BAH$ - прямоугольный ($AH \perp BC$),
 то $\angle BAH = 90 - 2\alpha$.

$$\angle KHA = 180 - 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha.$$

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$ по трем углам.

Пусть $AB \cap HM = O$.

$$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha.$$

$\angle AOM = \angle KOM$ как вертикальные
 углы.

$$\angle KNO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha.$$

$$\angle KNO = \alpha, \angle KHA = 2\alpha, \text{ тогда } \angle OHA = \alpha.$$

Пусть $NK \cap AC = P$, тогда
 $\triangle ANP$ - равнобедренный,
 т.к. $NM \perp AP$, $\angle KNO = \angle OHA$.

Дано:
 $\angle ABC = 90^\circ$ $AB = 5$
 $AB = BC$ $AC = 8$
 $AH \perp BC$
 $NK \perp AB$
 $NM \perp AC$

Доказать:
 а) $AM = MK$ - ?
 Найти: б) MK - ?

$\angle HPA = \angle MAH = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$.
 $PM = MA$, т.к. NM -
 - высота, медиана, биссектриса
 равнобедренного $\triangle ANP$.

$\triangle PKA$ - прямоугольный, т.к. $NK \perp AB$.
 Около $\triangle PKA$ можно описать
 окружность, и из-за того,
 что $\triangle PKA$ - прямоугольный,
 ее центр будет лежать
 в середине гипотенузы -
 т.е. M . AP будет ее
 диаметром, PM , AM и MK -
 радиусами.

Получается, что
 $PM = AM = MK$
 что и требовалось
 доказать.

б) Т.к. $BR \perp AC$ и $\triangle ABC$ -
 равнобедр., то $CR = RA =$
 $= \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

По теореме Пифагора:

$$BR^2 = AB^2 - AR^2$$

$$BR^2 = 25 - 16 = 9$$

$$BR = \sqrt{9} = 3.$$

$\triangle BRA$ подобен $\triangle KPA$ по
 трем углам ($\angle BRA = \angle KPA = 90^\circ$;
 $\angle RPA = \angle APK = 90 - \alpha$; $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$.)

$\triangle KPA$, в свою очередь, подобен $\triangle AOM$ по трем углам ($\angle AMO = \angle AKP = 90^\circ$; $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$; $\angle AOM = \angle APK = 90^\circ - \alpha$), следовательно стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OM}{KP}, \text{ и так как } PM = AM, AP = 2AM, \text{ коэффициент подобия } \triangle KPA \text{ и } \triangle AOM \text{ равен } 2.$$

$$\cos \alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Рассмотрим $\triangle PKM$, он - равнобедренный ($PM = KM$), тогда $\angle KPM = \angle PKM = 90^\circ - \alpha$.
Тогда $\angle PMK = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

$$\cos \angle KPM = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{BR}{AR} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Пусть $PM = AM = MK = x$
По теореме косинусов для $\triangle PKM$:

$$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2 \cdot PM \cdot MK \cdot \cos \angle KPM$$

$$PK^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \sin \alpha$$

$$PK^2 = 2x^2 - 1,2x^2 = 0,8x^2$$

$$PK = \sqrt{0,8x^2} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

По теореме Пифагора для $\triangle APK$:

$$AK^2 = AP^2 - PK^2$$

$$AK^2 = 4x^2 - 0,8x^2 = 3,2x^2$$

$$AK = x\sqrt{\frac{32}{10}} = 4x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4x\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4x\sqrt{5}}{5}}{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = 2, \text{ ~~и так как } \angle PAK = \angle MAO = \alpha, \text{ то } \angle AKP = \angle AOM = 90^\circ.~~$$

$$BK = 5 - AK$$

По теореме Пифагора для $\triangle BKP$:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 15 - \left(4x^2 + \frac{20x^2}{25}\right)$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 5 - \frac{80x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{25 - 12x^2}{5}$$

$$80 - 80x + 20x^2 = 25 - 12x^2$$

$$8x^2 - 80x + 65 = 0.$$

$$D = 6400 - 2080 = 4320$$

$$x = \frac{\sqrt{4320} + 80}{16} = \frac{12\sqrt{30} + 80}{16}$$

$$= \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} = MK;$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{30} + 20}{4};$$

Комментарий

Доказательство утверждения пункта а верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков AM и MK , кроме того, некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта б допущена ошибка при вычислении длины отрезка PK – вместо $\cos \angle KPM$ должно быть $\cos \angle KMP$.

Оценка эксперта: 1 балл.

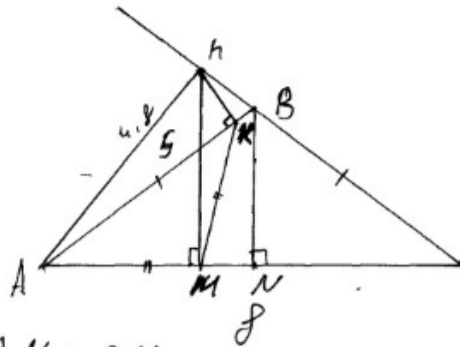
Пример 16.5

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

- а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
 б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

16.



Дано: $AB = BC$; $\triangle ABC$
 $AB = 5$
 $BC = 8$
 $HK \perp AB$
 $HM \perp AC$
 $MK = ?$

$$AN = CN$$

$$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$$

$$\cos A = \cos C = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AM}{Ah} = \frac{4}{5} \quad \cos A = \cos C = 0,8 \quad \text{в } \triangle ABC$$

$$\frac{AM}{5} = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$$

$$5hC = 32$$

$$hC = 6,4$$

$$\frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5} \quad Ah = 4,8$$

$$9 \sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0,64 = 0,36$$

$$\sin C = 0,6$$

$$\sin C = \cos A = 0,8 \quad \triangle ACh$$

$$\frac{AM}{Ah} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \frac{AM}{Ah} = 0,8$$

$$AM = \frac{3 \cdot 4,8}{5} \quad AM = 0,8 \cdot 4,8$$

$$AM = 2,88$$

$$AM = MK = 2,88$$

Ответ: $MK = 2,88$

Комментарий

Доказательство утверждения пункта а) отсутствует. Решение пункта б) выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта а).

Оценка эксперта: 1 балл.

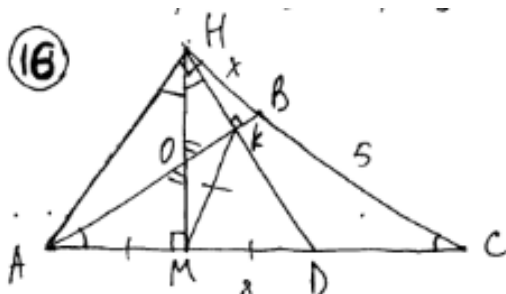
Пример 16.6

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



а) $\triangle ABE$: $p(\theta) \Rightarrow \angle BAE \angle BCA$ (1)
 $\triangle ANE$: прямоуг. HN высота \Rightarrow
 $\triangle ANE \sim \triangle ANM \Rightarrow \angle AEN = \angle ANM$ (2)
 $\triangle ANM \sim \triangle ANK$ (4) $\Rightarrow \angle ANM = \angle ANK$ (3)
 (1), (2), (3) $\Rightarrow ON$ - бисс в $\triangle ANB$.
~~продолжит~~ продолжит прямую NK до
 стороны AC . $\triangle AND$:

HN - бисс и бисс $\Rightarrow \triangle AND$ - $p(\theta) \Rightarrow HN$ - медиана $\Rightarrow AN = ND$
 $\triangle AND$: прямоуг. $AM = ND \Rightarrow KM$ - бисс $\Rightarrow \left. \begin{matrix} KM \perp AD \\ NA = ND \end{matrix} \right\} \Rightarrow$
 $2KM = 2AN \Rightarrow KM = AN$ ч. б. г.

б) пусть $KB = x$ ~~$\triangle ANB$~~ $\triangle ANB$: прямоуг. $AN^2 = AB^2 - KB^2$
 $\triangle ANE$: прямоуг. $AN^2 = AC^2 - KC^2 \Rightarrow AB^2 - KB^2 = AC^2 - KC^2$
 $25 - KB^2 = 64 - CB^2 - 2KB \cdot CB - KB^2$ $KB = 1,4$
 $\triangle ANE$: $KC^2 = MC \cdot AC$ $(6,4)^2 = 8CM$ $CM = 5,12$
 $AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88$
 $AM = NK \Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б) $MK = 2,88$

Комментарий

В доказательстве пункта а некорректно указано, что KM – биссектриса, при этом тут же записаны утверждения относительно KM , соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта б выполнено верно.

Оценка эксперта: 3 балла.

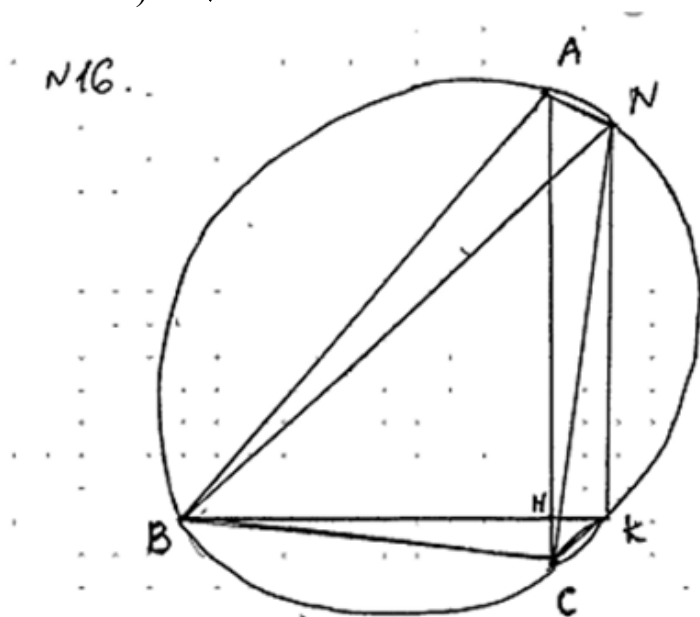
Пример 16.7

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Дано:

$BH \perp AC$
 BN – диаметр

а) Док-ть:

$AN = CK$

б) $R = 16$

$\angle BAC = 40^\circ$

$\angle ACB = 85^\circ$

Найти:

$NK = ?$

а) Док-во: $\angle BSN = 90^\circ$, т.к. BN – диаметр, $\Rightarrow \angle BSN = 90^\circ - \angle HBS \Rightarrow \Rightarrow \angle HSN = \angle HBS$, $\angle HSN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle ABN = \angle HBS \Rightarrow AN = CK$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

Комментарий

В доказательстве утверждения пункта а) есть верное название прямого угла – « $\angle BSN = 90^\circ$ », при этом тут же записано противоречащее условию утверждение « BN – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке – « $\angle HSN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», – содержит неточность, поскольку точка H не лежит на окружности, а $\angle ASN = \angle ABN$ (так как они опираются на одну дугу). Решение пункта б) отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.8

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BN – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

а) Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник, вписанный в окружность.

BN – диаметр, BH – высота ΔABC , прямая

BK содержит высоту BH и пересекает окр. в

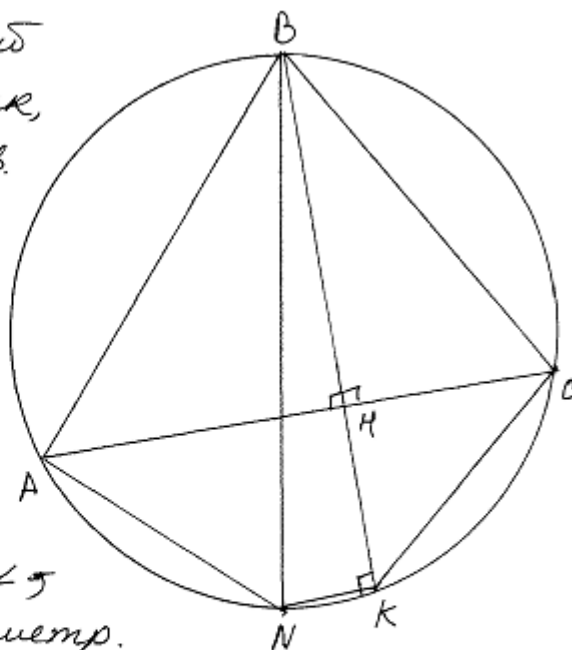
точке K . $\angle ANB = 90^\circ$

(т.к. BN – диаметр.)

$\angle NKB$ – вписанный \angle , опирающийся на диаметр.

$\Rightarrow \angle NKB = 90^\circ \Rightarrow$ Прямая $AC \parallel$ прямой

$NK \Rightarrow ACKN$ – трапеция. По св-ву трапеции, вписанной в окружность её стороны равны. $AN = CK$ ч.т.д.



Комментарий

При выполнении пункта а используется недоказанное утверждение, что $ACKN$ – трапеция. В решении есть некорректное утверждение: «по свойству трапеции, вписанной в окружность, её стороны равны», при этом рядом записано верное равенство боковых сторон. Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

6. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание № 17 – это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

- чисто алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов.

Задача 17 (демонстрационный вариант 2022 г.)

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

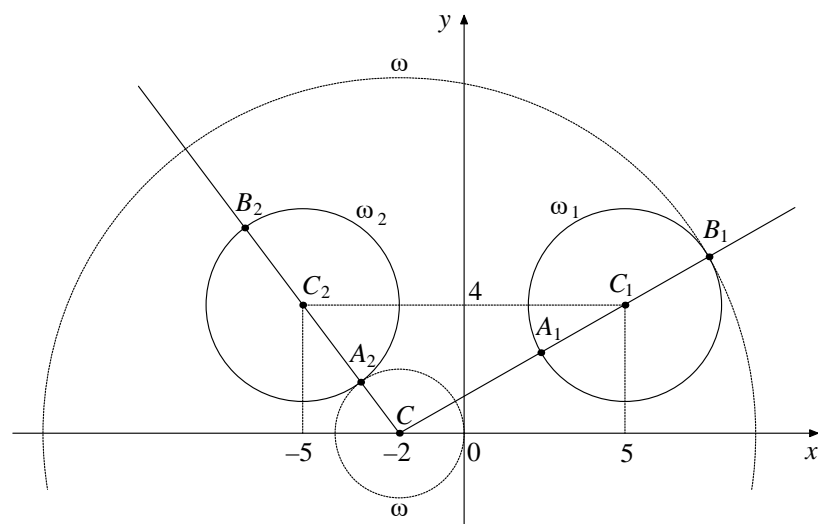
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ радиусом 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ и таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x + 2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2; 0)$ радиусом a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}, \text{ то } CA_1 = \sqrt{65} - 3, \quad CB_1 = \sqrt{65} + 3.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как

$$CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5, \text{ то } CA_2 = 5 - 3 = 2, \quad CB_2 = 5 + 3 = 8.$$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65} + 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но <ul style="list-style-type: none"> – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано 	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2

Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$ при условии $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Решим уравнение $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$:

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2)x^2 + 2ax + 1; \quad x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 = 0;$$

$$x^2(x + a + 1)(x + a - 1) = 0, \text{ откуда } x = 0, x = 1 - a \text{ или } x = -1 - a.$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a = 1$ имеем $1 - a = 0$. При $a = -1$ имеем $-1 - a = 0$. При остальных значениях a числа $0, 1 - a, -1 - a$ различны.

При $x = 0$ получаем: $x^2 + ax + 1 = 1 \geq 0$ при всех значениях a .

При $x = 1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 = 2 - a$.

Это выражение неотрицательно при $a \leq 2$.

При $x = -1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (-1 - a)^2 + a(-1 - a) + 1 = a + 2$.

Это выражение неотрицательно при $a \geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $-2 \leq a < -1; -1 < a < 1; 1 < a \leq 2$.

Ответ: $-2 \leq a < -1; -1 < a < 1; 1 < a \leq 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-2; 2)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$: $x = 0, x = 1 - a, x = -1 - a$ и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + ax + 1 > 0$ ($x^2 + ax + 1 \geq 0$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x - 5y + 5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + y^2 - y - x + 5y - 5 &= 52; \\ x^2 + 4x + y^2 + 4y - 57 &= 0; \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 &= 65. \end{aligned}$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2; -2)$

и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x - 5y + 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y + x - 5y + 5 = 52; \quad x^2 + 6x + y^2 - 6y - 47 = 0; \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 65.$$

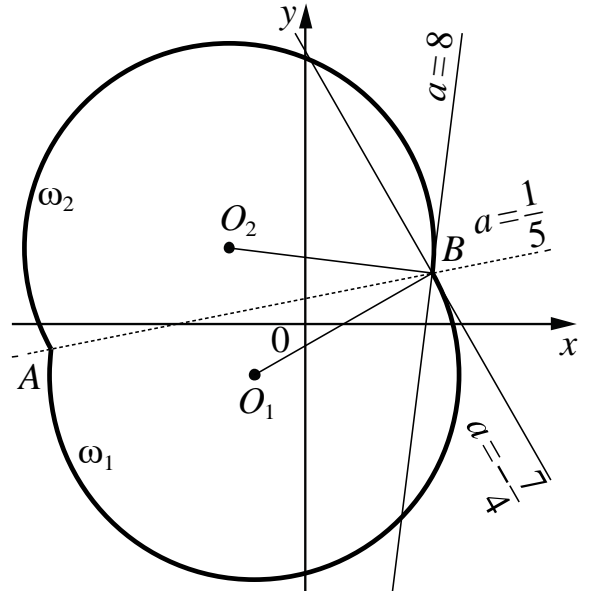
Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3; 3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10; -1)$ и $B(5; 2)$, лежащих на прямой $x - 5y + 5 = 0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B , во втором – дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , которая проходит через точку B , и угловой коэффициент которой равен a .

При $a = \frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B , то есть исходная система имеет два решения.

При $a = -\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B , угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.



При $a = 8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B , угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -\frac{7}{4}$ или $a > 8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A , то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5} < a < 8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$, для которых выполнено условие $x^2 - 2x - a \neq 0$.

При $x \leq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $-5x - 2 - a = 0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0; -2)$. При $x \geq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $x - 2 - a = 0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0; -2)$. Значит, уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ имеет два корня при $a > -2$, имеет один корень при $a = -2$ и не имеет корней при $a < -2$.

Уравнение $x^2 - 2x - a = 0$ задаёт параболу $a = x^2 - 2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} -5x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x+2) = 0, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1; 3)$ и $(-2; 8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1; -1)$ и $(2; 0)$.

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a , кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Примеры оценивания решений задания 17

Пример 17.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

Решение:

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1 \Leftrightarrow \sqrt{3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{a}{3}x + \frac{1}{3}\right)} = x^2 + \frac{a}{2}x + 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{3}} = x^2 + \frac{a}{2}x + 3$$

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = x^2 + 2ax + x^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2ax + 2 + a^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2ax + a^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x = 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0 \quad (2) \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы (1) имело 2 различных решения не равных 0 и удовлетворяющих (2), пусть $g(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$, $f(x) = x^2 + ax + 1$; $f' : \Delta < 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2 - 1}}$

Заметим, что (1) с $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - a \\ x = -1 - a \end{cases}$; тогда (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x = 1 - a \\ x = -1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2a + a^2 + a - a^2 + 1 \geq 0 \\ x = 1 - a \\ 1 + 2a + a^2 - a - a^2 + 1 \geq 0 \\ x = -1 - a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a \in \mathbb{R} \\ x = 1 - a \\ x = -1 - a \end{cases}$ три различных решения системы имеет тогда
 (3) и (4) имеют различия, не равные нулю решения; ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~
 наоборот. ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~ ~~важно~~
 1 - a = -1 - a \Leftrightarrow 1 = -1 \Rightarrow таких a не существует. (3) имеет реш. равное 0
 при $a = -1$ - не подходит. (4) имеет реш. = 0 при $a = 1$ - не подходит.

(5) имеет реш. при $a \geq -2$; (4) имеет реш. при $a \leq 2 \Rightarrow$ (3) и (4) имеют различные реш., отлич. от 0 при $a \in [-2; 2]$ и $a \neq \pm 1$

Ответ: $a \in [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 17.2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + a^2x^2 + 1 + 2x^2 + 2ax^3 + 2ax + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^4 + a^2x^2 - x^2 + 2ax^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + a^2 - 1 + 2ax) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Уравнение имеет решение, когда

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ имеет 2 корня и

они удовлетворяют неравенству $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$(x+a)^2 - 1 = 0$$

$$(x+a-1)(x+a+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = -a+1 & \text{Подставим } x \text{ в } x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x = -a-1 \end{cases}$$

$$1) (-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 \geq 0 \quad 2) (-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - a^2 + a + 1 \geq 0 \quad a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 \geq 0$$

$$-a + 2 \geq 0 \quad a \leq 2 \quad 2a + 2 \geq 0$$

$$a \in [-1, 2] \quad a \geq -1$$

Найдем значения x , когда они совпадают;

Замечая

$$1) -a+1 = -a-1 \quad 1) \text{ - не имеет решений}$$

$$2) 0 = -a+1 \quad 2) a = 1$$

$$3) 0 = -a-1 \quad 3) a = -1 \quad \left. \begin{array}{l} 2) \\ 3) \end{array} \right\} \text{ - вымарываем эти точки}$$

$$a \in (-1, 1) \cup (1, 2]$$

при $a \in$
 Ответ: $(-1, 1) \cup (1, 2]$. Уравнение имеет 3 разл. корня.

Комментарий

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2 допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 17.3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

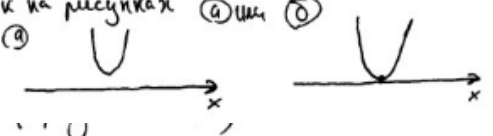
$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ (1); $a = ?$ ур-е имеет 3 различных корня

1) О.Д.З: $x^2 + ax + 1 \geq 0$

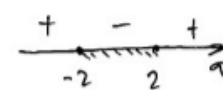
$x^2 + ax + 1 = 0$; $x^2 + ax + 1 > 0$, если $D \leq 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках (а) или (б)

$D = a^2 - 4$

ветви направлены вверх так как коэф. при x^2 равен $1 > 0$



$D \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \leq 0$; $(a-2)(a+2) \leq 0$



$\Rightarrow a \in [-2; 2]$ (*)

2) ~~при~~ при $a \in [-2; 2]$ возведем обе части уравнения в квадрат, тогда

$$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$$

$$3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax)^2 + 2(x^2 + ax) + 1$$

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + 2x^2 + 2ax + 1$$

$$x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2 - 3)x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 2ax + a^2 - 1) = 0$$

$x = 0$

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$

Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ имело ровно 2 корня, отличные от нуля

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = -a \pm 1$$

$x_1 \neq x_2$, т.к. $-a+1 \neq -a-1 \Rightarrow 1 \neq -1$ - не верно

\rightarrow уравнение (*) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

\rightarrow уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a \in [-2; 2]$

Ответ: $a \in [-2; 2]$

Комментарий

Получены корни уравнения $x = 0$, $x = 1 - a$, $x = -1 - a$ и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + ax + 1 \geq 0$ (есть только указание).

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.4

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ ^{17.4.} 3 различных корня

① $x^2 + ax + 1 < 0$
нет решений

② $x^2 + ax + 1 = 0$ (1)
тогда $3x^2 + 2ax + 1 = 0$ (2)

варианты ситуации

- (1) имеет 2 корня, (2) имеет 1 корень
- (1) имеет 1 корень, (2) имеет 2 корня

(1) $x^2 + ax + 1 = 0$
 $D > 0$ $a^2 - 4 > 0$
 $(a-2)(a+2) > 0$

(2) $3x^2 + 2ax + 1 = 0$
 $D/4 = a^2 - 3 = 0$
 $a^2 = 3$
 $a = \pm\sqrt{3}$

при $a = \pm\sqrt{3}$ D в (1) не $> 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{3}$

(1) $x^2 + ax + 1 = 0$
 $D = 0$ $a^2 - 4 = 0$
 $a = \pm 2$ $x_3 = \frac{-a}{2}$

(2) $3x^2 + 2ax + 1 = 0$
 $D/4 = a^2 - 3 > 0$
 $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3}) > 0$ при $a < -\sqrt{3}$ или $a > \sqrt{3}$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3}}{3}$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3}$ корни различные

$a = \pm 2$ проверим

аналогично при $a = -2$ $x_1 = -1, x_2 = -1$
 $x_2 = \frac{-2}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$
 $a = 2$ не подходит

при $a = -1$
 $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3}$ $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$
 $x_3 = 1$ $x_1 = x_2$ $a = -2$ не подходит

③ $x^2 + ax + 1 > 0$
 $3x^2 + 2ax + 1 = x^2 + a^2x^2 + 1 + 2ax^3 + 2x^2 + 2ax$
цп $a \neq \pm 2$ н.н. проанализируем

уравнение в 18. $x^2 + ax + 1 > 0$ (*)
 ③ $x^2 + a^2x^2 - x^2 + 2ax^3 = 0$ *равно вычитается* *пер-во со скобкой*

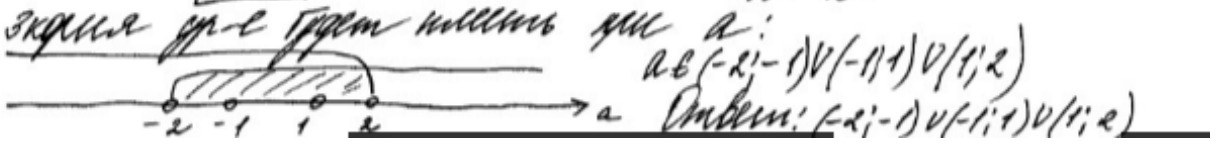
$x^2/x^2 + a^2 - 1 + 2ax = 0$
 $x \neq 0$
 - корни, которые $y = 0$ будет иметь неравенство от параметра a

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$
 равно вычитается *равенства решения*
 $D = a^2 - (a^2 - 1) > 0$ *неравенство будет иметь 2 корня*
 $a^2 - a^2 + 1 > 0$
 $1 > 0$ *всегда для любого a*
 $x_{1,2} = \frac{-a \pm 1}{1}$
корни не равны (обозначим и не равны) различия x_3

$x_1 = -a + 1$ $x_2 = -a - 1$
 $x_1 \neq x_2$ $-a + 1 \neq -a - 1$
 $1 \neq -1$ *всегда для любого a*

$x_1 \neq x_2$
 $-a + 1 \neq 0$ $-a - 1 \neq 0$
 $a \neq 1$ $a \neq -1$

(*) $x_1 = -a + 1$ $x_2 = -a - 1$
 $(-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 > 0$ *равенство вычитается*
 $(-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 > 0$ *для пер-ва*
 $(1-a)^2 - a^2 + a + 1 > 0$ *(и при x_1 и при x_2)*
 $1 - 2a + a^2 - a^2 + a + 1 > 0$
 $2 - 2a > 0$
 $a < 2$
 $(a+1)^2 - a^2 - a + 1 > 0$
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 > 0$
 $a + 2 > 0$
 $a > -2$



Комментарий

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 17.5

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52 & (1) \\ y + 2 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x + 5y + 5 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ y < -\frac{x-5}{5} \end{cases} \\ x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} \\ \begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 57 \\ y < -\frac{x-5}{5} \end{cases} \\ x^2 + 6x + y^2 + 6y = 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} & (1.1) \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 - \text{ур-е окр-ти с центром в т. Q (-2; 2) и} \\ R_1 = \sqrt{65} \\ y < -\frac{x-5}{5} & (1.2) \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 - \text{ур-е окр-ти с центром в т. P (-3; -3) и} \\ R_2 = R_1 = \sqrt{65} \end{cases}$$

$$(1.1) \begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 65 \end{cases}$$

т перес с прямой $y = -\frac{x-5}{5}$

$$(x+2)^2 + \left(-\frac{x-5}{5} - 2\right)^2 = 65$$

$$(x+2)^2 + \left(-\frac{(x+5)-10}{5}\right)^2 = 65$$

$$(x+2)^2 + \left(\frac{x+5+10}{5}\right)^2 = 65$$

$$(x+2)^2 + \frac{(x+15)^2}{25} = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + \frac{x^2 + 30x + 225}{25} = 65$$

$$25x^2 + 100x + 100 + x^2 + 30x + 225 - 65 \cdot 25 = 0$$

$$26x^2 + 130x - 1300 = 0$$

$$2x^2 + 10x - 100 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$D = 25 + 200 = 225$$

$$x_1 = \frac{-5 + 15}{2} = 5, \quad y_1 = -\frac{5-5}{5} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 15}{2} = -10, \quad y_2 = \frac{10-5}{5} = 1$$

$$1. 2.) \quad \begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 \end{cases}$$

и через центр $y = -\frac{x-5}{5}$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{x+5}{5}\right)^2 = 65$$

$$25x^2 + 6 \cdot 25x + 9 \cdot 25 + (x+5)^2 = 65 \cdot 25 = 0$$

$$26x^2 + 150x + 225 - 20x + 100 - 1625 = 0$$

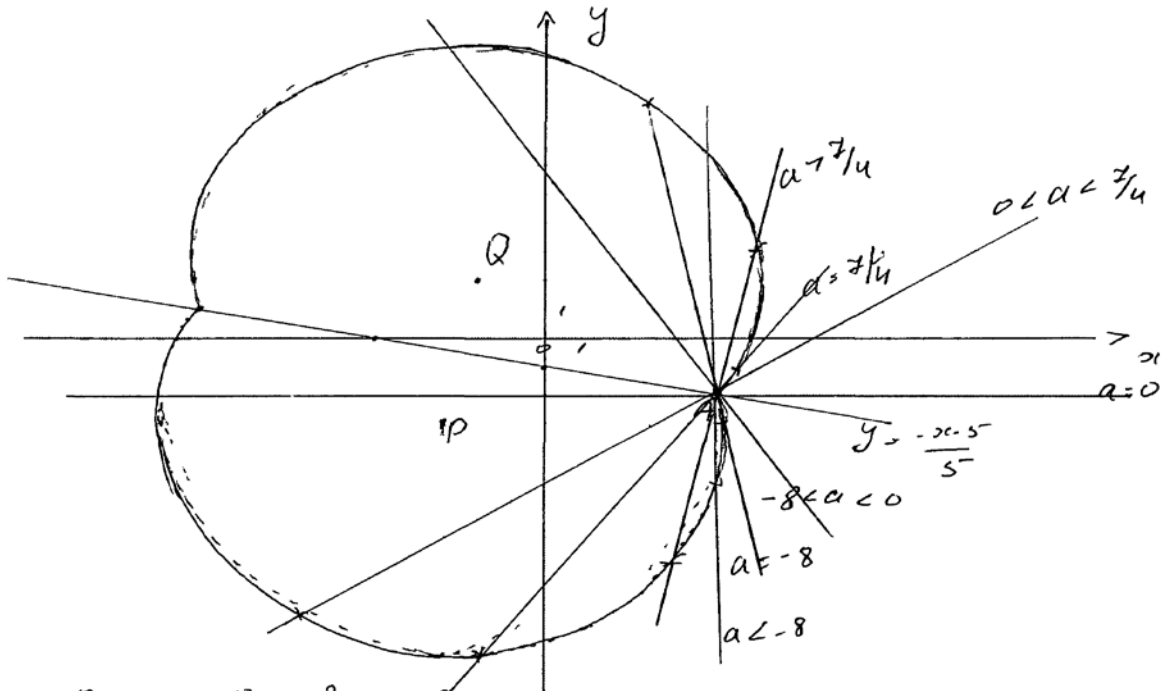
$$26x^2 + 130x - 1300 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x_3 = x_1 = 5, \quad y_3 = y_1 = -2$$

$$x_4 = x_2 = -10, \quad y_4 = y_2 = 1$$

(2) $y = a(x-5) - 2$ - уравнение прямой, проходящей через $A(5; -2)$ с переменным наклоном



при $a = 0$ - 2 реш. 8

найдем a , при к-м $y = a(x-5) - 2$ касается окружности в B в $m Q$

$$(x+2)^2 + (a(x-5) - 2 - 2)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + (a(x-5) - 4)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + a^2(x-5)^2 - 8a(x-5) + 16 - 65 = 0$$

$$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$$

$$x^2 + a^2x^2 + x(4 - 10a^2 - 8a) + 25a^2 + 40a - 45 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (2 - 5a^2 - 4a)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) =$$

$$(5a^2 + 4a - 2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) = 0 \text{ и находим наборы}$$

$$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - 20a^2 - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 - 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$$

$$-16a^2 - 56a + 49 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

$$16a^2 - 56a + 49 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$$

$$(4a - 7)^2 = 0$$

при $a = \frac{7}{4}$ - 3 р-я

при $a > \frac{7}{4}$ - 3 р-я, при $a \in (0; \frac{7}{4})$ - 2 р-я

найдем a , при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. опр-ти с Γ в т р

$$x^2 + 6x + (a(x-5) - 2)^2 + 6(a(x-5) - 2) - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 - 10a - 55) =$$

$$= 9 + 6(4 - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$$

$$- 25a^2 + 10a + 55 = \cancel{6a^2 - 10a^3 + 25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 50a^2 +}$$

$$+ 9 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 + 16a + 64 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)}$$

$$(a + 8)^2 = 0$$

при $a = -8$ - 3 р-я

при $a < -8$ - 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ - 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; \frac{7}{4})$ и 3 р-я при $a \in (-8; \frac{7}{4})$

Комментарий

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочёта: концы промежутка не включены в ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 17.6

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$.

Решение:

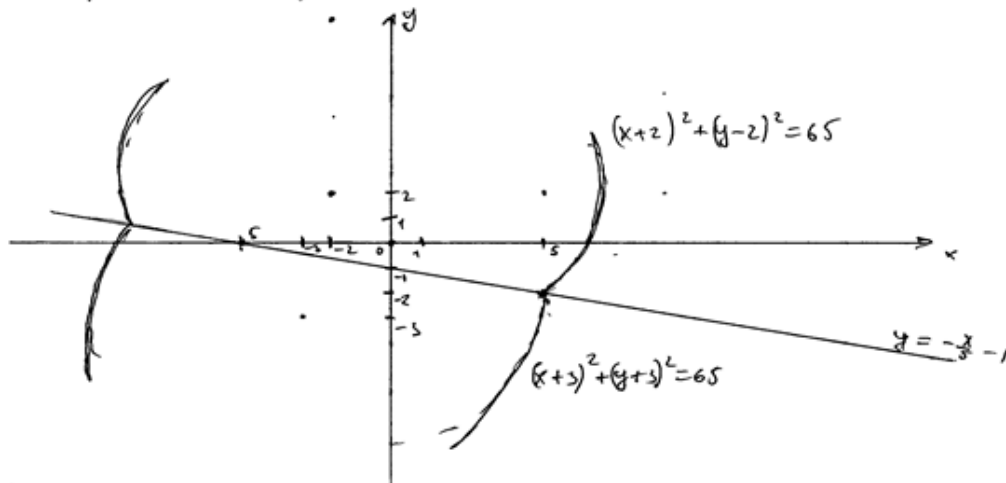
$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 \\ y + 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая при $x + 5y + 5 \geq 0$ и при $x + 5y + 5 < 0$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 & \text{65 - графиком ф-ии является окр. с центром } (-2; 2) \text{ и } r = \sqrt{65} \\ y \geq -\frac{x}{5} - 1 \\ (x+5)^2 + (y+3)^2 = 65 & \text{65 - графиком ф-ии является окр. с центром } (-5; -3) \text{ и } r = \sqrt{65} \\ y \leq -\frac{x}{5} - 1 \end{cases}$$

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y + 2 = a(x - 5)$.

$y = a(x - 5) - 2$. - графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5; -2)$. Тогда, для касания окр. $\text{окр.} \left(\{-5; -3\}; \sqrt{65} \right)$ "а" должно быть равно -8 , а для касания окр. $\left(\{-2; 2\}; \sqrt{65} \right)$ "а" должно быть равно $\frac{7}{4}$.
при $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.
при $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.
Ответ: $a \in [-8; \frac{7}{4}]$.

Комментарий

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания a «а должно быть равно -8 » или «... $7/4$ ».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 17.7

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

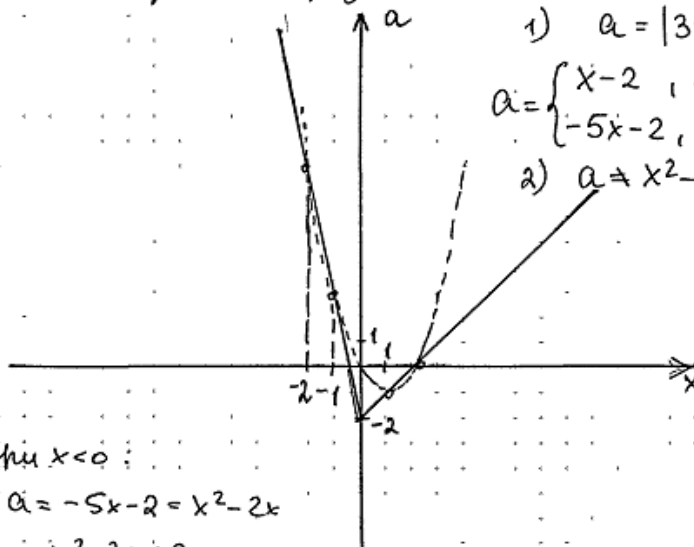
$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

№18. $\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$

имеет ровно 2 различных корня $a = ?$



1) $a = |3x| - 2x - 2 \Rightarrow$

$$a = \begin{cases} x - 2, & x \geq 0 \\ -5x - 2, & x < 0 \end{cases}$$

2) $a = x^2 - 2x$

при $x < 0$:

$$a = -5x - 2 = x^2 - 2x$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

x_1 и x_2 точки пересечения двух графиков
при $a(x_1)$ и $a(x_2)$ уравнение будет
иметь только одно решение.

при $x \geq 0$

$$x - 2 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = 2; \text{ При}$$

$a(x_3)$ и $a(x_4)$ будет только одно решение \Leftrightarrow ;

$\Rightarrow a(x_1) = 3, a(x_2) = 8, a(x_3) = -1, a(x_4) = 0$, в точке

$a = -2$ уравнение также будет иметь
только одно решение, при $a < -2$ решений
не будет $\Rightarrow a > -2, a \neq -1, a \neq 0, a \neq 3, a \neq 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 8) \cup (8; +\infty).$$

Ответ: $a \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 8) \cup (8; +\infty)$.

Комментарий

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 17.8

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$. Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$$|3x| - 2x - 2 - a = 0$$

Возведём уравнение в квадрат.

$$(|3x|)^2 = (2x + 2 + a)^2$$

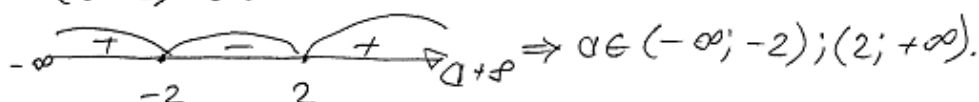
$$5x^2 + x(-8 - 4a) - 4a^2 - a^2 - 4 = 0$$

$$D = (-8 - 4a)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-a^2 - 4a - 4) = a^2 + 4a + 4.$$

Чтобы уравнение имело 2 решения D должен быть > 0

$$a^2 + 4a + 4 > 0$$

$$(a + 2)^2 > 0$$


$$\Rightarrow a \in (-\infty; -2); (2; +\infty).$$

~~$a \in$~~ Теперь разберёмся с ОДЗ.

$x^2 - 2x - a \neq 0$. \Rightarrow Нам не подходят варианты, когда $x^2 - 2x - a = 0$ (если $x^2 - 2x - a = 0$ уравнение имеет менее одного корня)

$$D = 4 + 4a.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}.$$

Если $a \in (-\infty; -2)$, то $x^2 - 2x - a \neq 0$

Если $a \in (2; +\infty)$, то $x^2 - 2x - a = 0 \Rightarrow$

$a \in (2; +\infty)$ не подходит.

Ответ: $a \in (-\infty; -2)$.

Комментарий

Неверное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Неверная логика исследования количества корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

7. Критерии проверки и оценка решений заданий 18

Задание 18 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений в будущей профессиональной деятельности».

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса.

Условие задания 18 разбито на пункты – ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые, можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более чётко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Задача 18 (демонстрационный вариант 2022 г.)

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?
- Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?
- Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Решение. а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест m учащихся, средний балл равнялся B , а перешедший в неё учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,9(m+1)B - mB; 10u = (9-m)B.$$

Если $B = 7$, то $(9-m)B$ не делится на 10, а $10u$ делится на 10. Но это невозможно, поскольку $10u = (9-m)B$.

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся A . Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0,9(8-m)A; 10u = (18-m)A = (9-m)B.$$

Заметим, что если $B=1$ или $B=3$, то $10u=(9-m)B$ не делится на 10. Если $B=2$ или $B=4$, то $m=4$. В первом случае $14A=10$, а во втором $14A=20$. Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При $B=5$ и $m=3$ получаем $u=3$ и $A=2$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 – по 3 балла; в школе № 2 писали тест 3 учащихся, и каждый набрал по 5 баллов; у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта <i>а</i> ; – обоснованное решение пункта <i>б</i> ; – искомая оценка в пункте <i>в</i> ; – пример в пункте <i>в</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Задание 1

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- а) Приведите пример такой последовательности.
 б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
 в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) Например, последовательность $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, \dots, 233, -230, 235$ удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 – нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных – чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ($1 \leq k \leq n-2$).

Поскольку $a_k + a_{k+1} \geq 3$, $a_{k+1} + a_{k+2} \leq 25$, получаем: $a_{k+2} \leq a_k + 22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n = 2m + 1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \leq a_{2m-1} + 22 \leq a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \leq \dots \leq a_1 + 22 \cdot m; \quad 235 \leq 1 + 22m,$$

откуда $m \geq 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел.

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: $1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235$.

Ответ: а) например, $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, \dots, 233, -230, 235$; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. а; – обоснованное решение п. б; – искомая оценка в п. в; – пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 2

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.

а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, ..., 87 – и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.

б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \dots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \dots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \dots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$, откуда, учитывая, что n – целое, получаем $n \geq 6$.

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, ..., 66, 69, 78.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта <i>a</i> ; – обоснованное решение пункта <i>b</i> ; – искомая оценка в пункте <i>b</i> ; – пример в пункте <i>b</i> , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Задание 3

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение.

а) Если на тридцати красных карточках написано число 2, а на синих карточках написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 437, то условия задачи выполнены.

б) Пусть сумма чисел, написанных на красных карточках, равна k , а сумма чисел, написанных на синих карточках, равна s . Тогда

$$k + s = 560; k + 3s = 1560,$$

откуда $k = 60$, $s = 500$.

Предположим, что красных карточек 10 штук. Если все числа на красных карточках не превосходят 5, то их сумма k не превосходит $5 \cdot 10 = 50$. Но $k = 60$, значит, есть хотя бы одна карточка, на которой написано число, не меньшее 6. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, то все числа на синих карточках не меньше 7, а их сумма не меньше $7 + 8 + \dots + 36 = 645$. Но $s = 500$, значит, не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Предположим, что синих карточек n штук, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно u . Тогда $(40 - n)u \geq 60$. С другой стороны, так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше $u + 1$, а их сумма не меньше

$$(u + 1) + (u + 2) + \dots + (u + n) = nu + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Но $s = 500$, значит,

$$nu + \frac{n(n + 1)}{2} \leq 500; u \leq \frac{500}{n} - \frac{n + 1}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{60}{40 - n} \leq u \leq \frac{500}{n} - \frac{n + 1}{2}.$$

Заметим, что это неравенство не выполняется при $n \geq 27$, поскольку при $n \geq 27$

$$\frac{60}{40-n} \geq \frac{60}{13} > 4 \text{ и } \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2} \leq \frac{122}{27} < 5.$$

Но неравенство $4 < u < 5$ не имеет целых решений, значит, синих карточек не может быть больше 26.

Покажем, что может быть 26 синих карточек. Если на десяти красных карточках написано число 4, на четырёх красных карточках написано число 5, а на синих карточках написаны числа 6, 7, ..., 29, 30, 50, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>a</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>б</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>a</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

Примеры оценивания решений задания 18

Пример 18.1

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- Приведите пример такой последовательности.
- Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет. т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \begin{cases} 3 \\ 5 \\ 25 \end{cases} \Rightarrow$
 \Rightarrow т.к. a_1 - неч., то все четные члены - чет.,
а нечетные - неч. $\Rightarrow a_n = 235$ - неч. член т.е.
 n не 1000. \Rightarrow невозможно. не может.

а) 1; 2; -1; 6; 23; 2

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;
-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

Комментарий

В пункте а допущена ошибка: сумма первых двух чисел равна -25. При ответе на вопрос пункта б участник экзамена верно показал, что случай $n = 1000$ невозможен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.2

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

- Приведите пример такой последовательности.
- Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
- Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

19) А) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, 13, -10, 15, -12, 17, -14, 19, -16, 21, -18, 23, -20, 25, -22, 27, -24, 29, -26, 31, -28, 33, -30, 35, -32, 37, -34, 39, -36, 41, -38, 43, -40, 45, -42, 47, -44, 49, -46, 51, -48, 53, -50, 55, -52, 57, -54, 59, -56, 61, -58, 63, -60, 65, -62, 67, -64, 69, -66, 71, -68, 73, -70, 75, -72, 77, -74, 79, -76, 81, -78, 83, -80, 85, -82, 87, -84, 89, -86, 91, -88, 93, -90, 95, -92, 97, -94, 99, -96, 101, -98, 103, -100, 105, -102, 107, -104, 109, -106, 111, -108, 113, -110, 115, -112, 117, -114, 119, -116, 121, -118, 123, -120, 125, -122, 127, -124, 129, -126, 131, -128, 133, -130, 135, -132, 137, -134, 139, -136, 141, -138, 143, -140, 145, -142, 147, -144, 149, -146, 151, -148, 153, -150, 155, -152, 157, -154, 159, -156, 161, -158, 163, -160, 165, -162, 167, -164, 169, -166, 171, -168, 173, -170, 175, -172, 177, -174, 179, -176, 181, -178, 183, -180, 185, -182, 187, -184, 189, -186, 191, -188, 193, -190, 195, -192, 197, -194, 199, -196, 201, -198, 203, -200, 205, -202, 207, -204, 209, -206, 211, -208, 213, -210, 215, -212, 217, -214, 219, -216, 221, -218, 223, -220, 225, -222, 227, -224, 229, -226, 231, -228, 233, -230, 235.

Б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3...

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет пятсот 0 и пятсот 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные - тройками.

Комментарий

В пункте а верно приведён пример. Решение пункта б неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
 б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
 в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ - 30 чисел. Преположим что все они зелёные. Да, может, т.к мы можем заменить число 90 на число 21, при этом-то же число цветом (красным), а все тогда общие числа увеличатся на $1395 - 2 \cdot 90$ - т.е. 9.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёными. Это $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$. Нам нужно добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы добавим самое большое зелёное - 90 и добавим минимально возможное красное - 7. Итоговая сумма $1395 - 90 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ не возможно.

в) Если предположить 30 чисел даёт остаток при делении на 7

в порядке: 3 6 2 5 1 4 0

Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 \Rightarrow

Эти зелёные числа дают на 7 остаток. Если считать по 7 числам. Они не могут составить ни $8 \cdot 7$ и $9 \cdot 7 = 1342 > 1067 \Rightarrow$

\Rightarrow они дают наименьше на 63.

$3 + \dots + 63 = 63 \cdot 11 = 759 < 1067$, $1067 - 759 = 308$ $\overline{) 308}$
 $\begin{array}{r} 308 \\ 7 \cdot 44 \\ \hline 308 \\ 0 \end{array}$

Комментарий

Приведено верное решение пункта а. Приведено верное решение пункта б. Решение в пункте в не завершено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.4

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, пример:

$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots, 87$; 21
 зелёные ; красное

Сумма чисел $= 1326 < 1395$, так как зелёные числа.

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

Т.к. сумма $\rightarrow \min \Rightarrow$ красное число $= 7$,
 зелёные $- 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots, 87$.

$\sum \text{числ} = 1305 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ Не может
 Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ - функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном n . Где n - кол-во красных чисел.

$$f(n) = 7 \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) + 3 \cdot \left(\frac{(30-n)(31-n)}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(7n^2 + 7n + 3n^2 + 3 \cdot 61n + 3 \cdot 30 \cdot 31 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(10n^2 - 176n + 2790 \right) = 5n^2 - 88n + 1395.$$

найдем минимальное $n \in (\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^+)$, такое что $f(n) \leq 1067$.

$$5n^2 - 88n + 1395 \leq 1067$$

$$5n^2 - 88n + 328 \leq 0$$

$$D = 44^2 - 328 \cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$$
$$n \in \left[\frac{44 - \sqrt{296}}{5}, \frac{44 + \sqrt{296}}{5} \right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 = 1047.$$

$f(5) = 1380$, \Rightarrow для 5-кеверта _{1067.}

Ответ: 6- наименьшее кол-во краевых пример:

7, 14, 21, 28, 35, 56.

3, 6, 9, 12, ..., 69, 78, ~~81~~

Комментарий

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.5

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) индекс обозначает цвет, который имеет число

а) Можно, так как одно и то же число может быть залито разными цветами.

пример: $3_{z1}, 6_{z1}, \dots, 87_{z1}, 21_k$

б) Нет.

Если только одно число красное, то в ^{наборе} вычитаемости с наименьшей суммой $(3_{z1}, 6_{z1}, \dots, 87_{z1}, 7_k)$ сумма равна 1312, что больше, чем 1067

в) 6.

в ^{наборе} вычитаемости с наименьшим красным числом и наименьшей

суммой $(3_{z1}, 6_{z1}, \dots, 76_{z1}, 7_k, 7_k, \dots, 35_k)$ сумма равна 1077, $1077 > 1067$

однако сумма будет равна 1067, если в вычитаемости выше наборе заменить

66_{z1} на 56_k .

Комментарий

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В решении пункта в есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв 5 красных чисел, нужно взять 25 зелёных чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.6

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, может. Например, вместо зелёного числа 24 можно поставить красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зелёному). Тогда сумма примет вид $3 + 6 + \dots + 21 + 21 + 27 + \dots + 90 = 1392 < 1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зелёные числа имеют остаток 0). Наибольшее такое число — 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зелёных чисел равна 1395. Если сам заметить наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395 - 90 + 14 = 1319 > 1067$. Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395 - 1067 = 328 \Rightarrow$ в сумме $3 + 6 + \dots + 90$ необходимо так заменить несколько зелёных чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зелёные числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305 < 328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72 - 49 = 23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305 + 23 = 328$) \Rightarrow искомое наименьшее количество красных чисел — 6.

Ответ: 6.

Комментарий

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В пункте в неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелёными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.7

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

N 19. x - сумма чисел на красных карточках
 y - сумма чисел на синих карточках

$$\begin{cases} x+y=14 \cdot 40=560 \\ x+3y=39 \cdot 40=1560 \Rightarrow 2y=1000 \Rightarrow y=500, \\ x=60 \Rightarrow \text{сумма чисел не удовлетворяющихся} \\ \text{синих чисел} = 500, \text{ а красных } 60 \end{cases}$$

а) Да, может. Пример: на 30 красных карточках написано число 2, а на 10 синих числа 100, 150, 3, 7, 5, 4, 9, 21, 175, 21. Каждое число на синей карточке больше любого на красной и не повторяется.

б) Нет. Если на столе ровно 10 красных карточек, то самое маленькое из возможных максимальное число, написанное на карточке будет равно 6; тогда на синих карточках не должно быть числа меньше 7, синих карточек должно быть 30, а сумма на них равна.

ся 500, самый маленький возможный шаг между числами $d=1$; тогда, если $a_1=7$, то сумма всех чисел $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $n=30$, так как синих карточек всего 30, $a_n = 29d + a_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_n = \frac{7 + 29 \cdot 1 + 7}{2} \cdot 30 = (14 + 29) \cdot 15 = 43 \cdot 15 = 645$, это

больше 500, S_n - минимальная сумма, которая может получиться; т.к. $S_n > 500$ при данных условиях на столе не может быть ровно 10 красных карточек.

в). Ответ: 11, т.к. в других случаях общая сумма чисел на синих карточках превышает 500.

Комментарий

В решении пункта а приведен пример чисел на синих карточках, в котором есть повторяющееся число 21, да и сумма этих чисел равна 495, а не 500. Обоснованно получен ответ в пункте б. Решение пункта в фактически отсутствует, да и сам ответ неверный.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.8

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

а) $\text{среднее арифм.} = \frac{\text{сумма}}{\text{кол-во}}$

$\Rightarrow \text{сумма} = \text{с.А} \cdot \text{кол-во}$

Пусть сумма синих L , а красных M , тогда $L + M = 14 \cdot 40$ - это в 1м случае.
Во втором $3L + M = 39 \cdot 40$

$$\begin{cases} L + M = 14 \cdot 40 & \Rightarrow M = 14 \cdot 40 - L \quad (1) \\ 3L + M = 39 \cdot 40 & (2) \end{cases}$$

$1 \rightarrow 2 \quad 3L + 14 \cdot 40 - L = 39 \cdot 40$

$$2L = 40 \cdot 25$$
$$L = 20 \cdot 25 = 500 - \text{сумма}$$

Все синие = 500 \Rightarrow 500 надо получить 10 различными числами. Это можно сделать, например:

46; 54; 30; 70; 20; 80; 10; 90; 60; 40

б). $L = 500$; $M = 14 \cdot 40 - L \Rightarrow M = 520 - 500 = 20$.
Красных карточек 10. \Rightarrow числа с А=20.
Среднее арифметическое должно быть 2.
Наквими числами могут быть.

$2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2 \Rightarrow \text{Да}$.

Комментарий

В решении пункта а есть только описание чисел, написанных на синих карточках. Указание чисел, написанных на красных карточках, отсутствует. В решении пункта б допущена вычислительная ошибка. Решение пункта в отсутствует.

Оценка эксперта: 2 балла.

Указания по оцениванию развёрнутых ответов участников ЕГЭ для эксперта, проверяющего развёрнутые ответы на задания 12–18 по МАТЕМАТИКЕ

(документ предоставляется эксперту при проведении оценивания экзаменационных работ вместе с критериями оценивания)

Эксперт, проверяющий задания с развёрнутым ответом, располагает следующими материалами:

- 1) текстами заданий;
- 2) возможным вариантом решения каждой задачи 12–18;
- 3) критериями оценивания заданий 12–18.

*При проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом эксперт должен иметь возможность пользоваться **непрограммируемым калькулятором**¹.*

В критериях оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом КИМ ЕГЭ по математике для каждого задания приводится один возможный вариант решения. Однако предлагаемый разработчиками КИМ способ (метод) решения не является эталонным. Он лишь помогает эксперту в решении соответствующего задания.

Выполнение заданий оценивается в соответствии с критериями оценивания ответов на задания с развёрнутым ответом. Принципом построения системы оценивания является оценка продвижений участника экзамена в решении задачи в виде достижения формализованных в критериях промежуточных результатов. Максимальный балл выставляется только при наличии в тексте решения обоснованно полученного правильного ответа. Наличие в тексте решения недостатка в обосновании ответа или вычислительной ошибки не позволяет выставить за решение задания в соответствии с критериями максимальный балл. В случае, когда решение не подпадает ни под один из критериев положительных баллов (не достигнут ни один промежуточный математический результат), выполнение задания оценивается 0 баллов.

При использовании обобщённой схемы оценивания ответов на каждое из заданий 12–18 *рекомендуется обращать внимание на следующие моменты.*

- Перед проведением проверки выполнения каждого из заданий необходимо изучить критерии его оценивания в материалах для эксперта, обратив внимание *на детализацию и конкретизацию*

¹ Возможность использовать непрограммируемый калькулятор при оценивании экзаменационных работ участников ЕГЭ 2022 г. должна быть закреплена нормативными правовыми актами органа исполнительной власти субъекта Российской Федерации, осуществляющего государственное управление в сфере образования.

обобщённой схемы оценивания применительно к конкретному заданию.

- Решение участника экзамена может иметь логику, отличную от логики решения, данного в критериях (альтернативное решение). В этом случае эксперт оценивает допустимость решения конкретной задачи тем способом, который выбрал участник экзамена. Если ход решения допустим, то ***эксперт оценивает обоснованность этого решения на основании той совокупности свойств (признаков), формул или утверждений, которые соответствуют выбранному способу решения.***
- Участник экзамена может использовать без доказательства математические факты и формулы, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования (далее – Федеральный перечень).
- Если экзаменуемый использует в решении без доказательства формулы и факты, которые не представлены в учебниках, входящих в Федеральный перечень, то такое решение классифицируется как недостаточно обоснованное.
- Если математические преобразования, представленные в решении, не отражают основных необходимых логических шагов, то решение не может оцениваться максимальным баллом.
- Если при решении геометрической задачи экзаменуемый использует рисунок, то ошибки в соотношении длин отрезков на рисунке не влекут за собой снижения баллов за решение геометрической задачи, если на рисунке верно отображена геометрическая конфигурация и верно обозначены точки, описанные в решении.
- При проверке правильности решения необходимо проверять корректность промежуточных шагов решения, в том числе числовых выкладок (при необходимости – с помощью калькулятора). Наличие ошибок в промежуточных выкладках, даже не повлиявших на итоговый ответ, означает наличие математически некорректного перехода в решении задачи, что не позволяет оценить решение задачи максимальным баллом.

- Если участник экзамена решает задачу с другими числовыми данными, то такое решение задачи оценивается в 0 баллов, даже если он решает содержательно более сложную задачу.
- При проверке решения каждого из *заданий 12–18* необходимо вычленить в решении *три элемента*:
 - логику (последовательность и закономерность) решения,
 - обоснованность решения,
 - числовой ответ.

Количество логических шагов в решении и перечень условий и закономерностей зависит от выбранного способа решения. Это необходимо учитывать при применении критериев оценивания выполнения задания с развёрнутым ответом.

В процессе проверки необходимо придерживаться *следующих общих правил*.

- При работе эксперт выставляет свои оценки в протокол проверки развёрнутых ответов.
- Выставление баллов в протокол проверки развёрнутых ответов рекомендуется проводить по работам: все задания первой проверяемой работы, все задания второй проверяемой работы и т.д. Это позволяет обнаружить ошибки, допущенные экзаменуемым в нумерации задач, а также обнаружить пронумерованную, или пронумерованную неверно, или случайно пропущенную экспертом задачу. Ошибочное указание участником экзамена номера задачи, которую он выполняет, не может служить основанием для снижения оценки за фактически выполненное задание.
- Результаты оценивания переносятся в протокол проверки развёрнутых ответов, при этом баллы по каждому заданию переносятся в колонку, название которой соответствует номеру задания (рис. 1):
 - баллы по заданию **12** переносятся в колонку **12** протокола;
 - баллы по заданию **13** переносятся в колонку **13** протокола;
 - баллы по заданию **14** переносятся в колонку **14** протокола;
 - баллы по заданию **15** переносятся в колонку **15** протокола;
 - баллы по заданию **16** переносятся в колонку **16** протокола;
 - баллы по заданию **17** переносятся в колонку **17** протокола;
 - баллы по заданию **18** переносятся в колонку **18** протокола.
- Баллы выставляются в протокол проверки гелевой чёрной ручкой.

- Внесение изменений в протокол проверки крайне нежелательно. Использование замазок и затирок в целях исправления записей категорически недопустимо!

Рисунок 1. Протокол проверки развёрнутых ответов 2022 года. Образец

№		Код бланка	Позиции оценивания																
			12	13	14	15	16	17	18										
1	2920800339590	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

Дата проверки □□ - □□ - □□

Подпись эксперта

Внимание! При выставлении баллов за выполнение задания в Протокол проверки развёрнутых ответов следует иметь в виду, что **если ответ отсутствует** (нет никаких записей, свидетельствующих о том, что экзаменуемый приступал к выполнению задания), то в протокол проставляется «X», а не «0». Если в работе записан только номер задания без попыток его выполнения, то в протокол выставляется «0».